О явлении параметрического резонанса в крутильных колебаниях коленчатых валов

М. М. Затепякин

Задача об определении резонансных зон при крутильных колебаниях коленчатых валов приводит к исследованию системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим вал, имеющий n колен, и обозначим через r_ν, m_ν, θ_ν соответственно радиус ν-го кривошипа, массу шатуна и поршня, момент инерции вращающихся частей, связанных неподвижно с ν коленом ($\nu=0$ относится к маховику); через $c_{\nu,\nu+1}$ — коэффициент жесткости участка вала между ν и $\nu+1$ кривошипом, через α_ν — угол поворота кривошипа в состоянии покоя. Пусть $\bar{\varphi}_\nu = \omega t + \alpha_\nu$ — угол поворота ν-го кривошипа без учета упругих деформаций, а $\psi_\nu = \varphi_\nu - \bar{\varphi}_\nu$ — его смещение в силу деформаций. Если предположить, что длина шатуна в сравнении с радиусом кривошипа «бесконечно большая» и что

$$q_\nu = \psi_\nu \sqrt{k_\nu(\bar{\varphi}_\nu)},\quad k_\nu(\bar{\varphi}_\nu) = \theta_\nu + m_\nu r_\nu^2 \sin^2\bar{\varphi}_\nu,$$

то система дифференциальных уравнений примет вид

$$\frac{d^2 q_\nu}{dt^2} - \frac{1}{\sqrt{A_\nu[1-\zeta_\nu\cos(2\omega t+2\alpha_\nu)]}}\left\{\frac{c_{\nu-1,\nu}\,q_{\nu-1}}{\sqrt{A_{\nu-1}[1-\zeta_{\nu-1}\cos(2\omega t+2\alpha_{\nu-1})]}} -\right.$$

$$\left. - \frac{(c_{\nu-1,\nu}+c_{\nu,\nu+1})\,q_\nu}{\sqrt{A_\nu[1-\zeta_\nu\cos(2\omega t+2\alpha_\nu)]}} + \frac{c_{\nu,\nu+1}\,q_{\nu+1}}{\sqrt{A_{\nu+1}[1-\zeta_{\nu+1}\cos(2\omega t+2\alpha_{\nu+1})]}}\right\} = 0$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где

$$A_\nu = \theta_\nu + \frac{m_\nu r_\nu^2}{2},\quad \zeta_\nu = \frac{m_\nu r_\nu^2}{2\theta_\nu + m_\nu r_\nu^2}.$$

Положив $\zeta_\nu = \varepsilon a_\nu$ $(\varepsilon < 1)$ и разлагая выражение $\dfrac{1}{\sqrt{A_\nu[1-\zeta_\nu\cos(2\omega t+2\alpha_\nu)]}}$ в ряд по степеням ε, систему (1) можно привести к векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + [Q_0 + \varepsilon Q_1(2\omega t) + \varepsilon^2 Q_2(2\omega t) + \ldots]\,q = 0, \tag{2}$$

где $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$ — $n+1$-мерная вектор-функция, $Q_j(t)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ — якобиевы матрицы, причем $Q_0 = \text{const}$, $Q_j(t+2\pi) = Q_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

При $\varepsilon = 0$ получается уравнение, к которому приводит метод эквивалентных дисков. В этом случае характеристические числа матрицы Q_0 являются квадратами частот собственных колебаний. Обозначая эти частоты через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, получим для их определения частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{c_{01}}{A_0} - \omega^2 & -\frac{c_{01}}{\sqrt{A_0A_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{c_{01}}{\sqrt{A_0A_1}} & \frac{c_{01}+c_{12}}{A_1} - \omega^2 & -\frac{c_{12}}{\sqrt{A_1A_2}} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{c_{n-1,n}}{A_n} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

(один из корней этого уравнения, который мы не считаем, равен нулю). Характеристические числа матрицы Q_0 неотрицательные и различны в силу ее симметричности и положительной определенности квадратичной формы, отвечающей матрице Q_0.

Пусть S — преобразующая матрица, с помощью которой матрица Q_0 приводится к диагональному виду. Тогда, полагая в уравнении (2) $y = Sq$, приведем его к виду

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [P_0 + \varepsilon P_1(2\omega t) + \varepsilon^2 P_2(2\omega t) + \ldots]\, y = 0, \tag{3}$$

где P_0 — диагональная матрица и $P_j(t) = SQ_j(t)S^{-1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Важную роль при исследовании уравнения (3) играет задача об определении зон устойчивости, т. е. тех значений ω, при которых все решения уравнения (3) ограничены. Судить о том, будут ли решения ограничены или нет, дают возможность мультипликаторы уравнения. Если при изменении ω мультипликаторы движутся по единичной окружности, то решения уравнения (3) будут ограничены, в противном случае среди решений будут существовать неограниченные. Как показал М. Г. Крейн [2], мультипликаторы в зависимости от своих свойств подразделяются на мультипликаторы первого и второго рода, а сход их с единичной окружности возможен только в точках встречи мультипликаторов разных родов.

В исследовании уравнения (3) Н. Е. Кочин [1] предполагал, что сход мультипликаторов с единичной окружности может произойти только в точках ± 1. Однако это предположение справедливо только для скалярного дифференциального уравнения второго порядка. В этом случае уравнению отвечают два мультипликатора, расположенные симметрично относительно действительной оси, и встреча их возможна только в точках ∓ 1. Для векторного дифференциального уравнения точками встречи мультипликаторов разных родов могут быть точки, отличные от ± 1. Поэтому в исследовании Н. Е. Кочина были вычислены так называемые зоны главного резонанса и выпущены зоны комбинационного резонанса. Построение зон комбинационного резонанса и составляет цель настоящей статьи.

Совершив в уравнении (3) замену переменной $\tau = 2\omega t$, получим

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \lambda\,[P_0 + \varepsilon P_1(\tau) + \varepsilon^2 P_2(\tau) + \ldots]\, y = 0 \quad \left(\lambda = \frac{1}{4\omega^2}\right), \tag{4}$$

$$P_j(\tau + 2\pi) = P_j(\tau) \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

причем

$$P_1(\tau) = \| p_{kj}^{(1)} \|_0^n e^{i\tau} + \| \bar{p}_{kj}^{(1)} \|_0^n e^{-i\tau}; \ P_2(\tau) = \| p_{kj}^{(2)} \|_0^n e^{i2\tau} + \| b_{kj}^{(2)} \|_0^n + \\ + \| \bar{p}_{kj}^{(2)} \|_0^n e^{-i2\tau},$$

а $\bar{p}_{kj}^{(h)}$ — комплексно-сопряженное к $p_{kj}^{(h)}$ $(h = 1, 2)$.

Комплексная величина ϱ называется мультипликатором уравнения, если ей отвечает решение $y(\tau) \neq 0$ этого уравнения, обладающее свойством

$$y(\tau + 2\pi) = \varrho \cdot y(\tau).$$

При построении зон неустойчивости уравнения (4) применим метод, принадлежащий И. Г. Малкину [3].

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$y(\tau, \varepsilon) = e^{i\mu(\varepsilon)\tau} \cdot v(\tau, \varepsilon), \tag{5}$$

где $\mu(\varepsilon)$ — вещественная величина, а $v(\tau + 2\pi, \varepsilon) = v(\tau, \varepsilon)$ — периодическая вектор-функция. Тогда $y(\tau + 2\pi, \varepsilon) = e^{i2\pi\mu(\varepsilon)} \cdot y(\tau, \varepsilon)$ и условие встречи мультипликаторов на границах зоны устойчивости означает кратность величины $\mu(\varepsilon)$.

Если положить $\omega = \dfrac{\omega_j + \omega_k}{N}$ $(j \neq k, \ j, k = 1, 2, \ldots, n; \ N = 1, 2, 3, \ldots)$, то при $\varepsilon = 0$ у уравнения (4) совпадают два мультипликатора разных родов в точке

$$\varrho_0 = \exp\left(i2\pi \frac{N\omega_j}{\omega_j + \omega_k}\right) = \exp\left(-i2\pi \frac{N\omega_k}{\omega_j + \omega_k}\right) = \exp(i2\pi\mu_0).$$

Поскольку уравнение (4) аналитически зависит от ε, то при достаточно малых значениях ε будут справедливы разложения

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots, \\ \mu(\varepsilon) &= \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \varepsilon^2\mu_2 + \ldots, \\ v(\tau, \varepsilon) &= v_0 + \varepsilon v_1(\tau) + \varepsilon^2 v_2(\tau) + \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

причем $\lambda_0 = \dfrac{N^2}{(\omega_j + \omega_k)^2}$, $\mu_0 = \dfrac{N\omega_j}{\omega_j + \omega_k}$. Подставляя (5) и (6) в уравнение (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\frac{d^2 v_\nu}{d\tau^2} + 2i\mu_0 \frac{dv_\nu}{d\tau} + (\lambda_0 P_0 - \mu_0^2 I) v_\nu = F_\nu(\tau), \tag{7}$$

$$v_\nu(\tau + 2\pi) = v_\nu(\tau) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

где I — единичная матрица, $F_\nu(\tau)$ — вектор-функция, зависящая от

$v_0, v_1, \ldots, v_{\nu-1}; \ P_0, P_1, \ldots, P_\nu; \ \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu; \ \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\nu$, а $F_0(\tau) \equiv 0$.

Будем далее считать, что общее решение $v_0(\tau)$ соответствующего однородного уравнения включено в функцию $v_0(\tau)$. Тогда при определении общего решения уравнения (7) достаточно найти частное решение, которое можно искать в виде

$$v_\nu(\tau) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} D_h^{(\nu)} e^{ih\tau}. \tag{8}$$

Здесь $D_h^{(\nu)}$ — постоянный вектор, координаты которого определятся, если подставить (8) в уравнение (7). Так

$$v_0(\tau) = D_0^{(0)} + D_{-N}^{(0)} e^{-iN\tau},$$

где

$$D_0^{(0)} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \xi_j = M_0, \quad \xi_{l+j} = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

$$D_{-N}^{(0)} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \xi_k = N_0, \quad \xi_{l+k} = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Разыскивая далее $v_1(\tau)$, рассмотрим два случая:

а) $N \neq 1$. В этом случае для того, чтобы функция $v_1(\tau)$ была периодической, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$(2\mu_0\mu_1 - \lambda_1\omega_j^2)M_0 = 0,$$

$$(-2N\mu_1 + 2\mu_0\mu_1 - \lambda_1\omega_k^2)N_0 = 0.$$

которые для $M_0 \neq 0$ и $N_0 \neq 0$ выполняются только при $\mu_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$.

б) $N = 1$. Из тех же соображений, что и в случае а), заключаем, что $M_0 \neq 0$ и $N_0 \neq 0$ должны быть решением системы

$$\begin{cases} (2\mu_0\mu_1 - \lambda_1\omega_j^2)M_0 - \lambda_0 p_{jk}^{(1)} N_0 = 0 \\ -\lambda_0 p_{kj}^{(1)} M_0 + (-2\mu_1 + 2\mu_0\mu_1 - \lambda_1\omega_k^2)N_0 = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю определитель системы, получим квадратное уравнение относительно μ_1, а затем из условия кратности μ_1 определим

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{(\omega_j + \omega_k)^3} \sqrt{\frac{p_{jk}^{(1)} \overline{p_{kj}^{(1)}}}{\omega_j\omega_k}}.$$

После того как λ_1 определено, можно найти μ_1 и отношение величин M_0 и N_0. Продолжая этот процесс, мы каждый раз будем находить λ_ν из условия кратности μ_ν. Таким образом, неизвестные коэффициенты разложений (6) будут последовательно определяться.

Не останавливаясь на дальнейших вычислениях, приведем выражение, с точностью до ε^2 включительно, для зоны комбинационного резонанса

I. $N = 1$;

$$\frac{\omega_j + \omega_k}{2} - \varepsilon \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_{jk}^{(1)} \overline{p_{kj}^{(1)}}}{\omega_j\omega_k}} - \varepsilon^2 \frac{1}{4} \left[\frac{\beta_1}{\omega_j} + \frac{\gamma_1}{\omega_k} + \frac{\omega_j + \omega_k}{4\omega_j^2\omega_k^2} p_{jk}^{(1)} \overline{p_{kj}^{(1)}} \right] +$$

$$+ \ldots < \omega < \frac{\omega_j + \omega_k}{2} + \varepsilon \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_{jk}^{(1)} \overline{p_{kj}^{(1)}}}{\omega_j\omega_k}} - \varepsilon^2 \frac{1}{4} \left[\frac{\beta_1}{\omega_j} + \frac{\gamma_1}{\omega_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_j + \omega_k}{4\omega_j^2\omega_k^2} p_{jk}^{(1)} \overline{p_{kj}^{(1)}} \right] + \ldots,$$

$$\beta_1 = -b_{jj}^{(2)} + \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^{n} \frac{p_{j\nu}^{(1)} \overline{p_{\nu j}^{(1)}}}{\omega_\nu^2 - \omega_k^2} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\overline{p_{j\nu}^{(1)}} p_{\nu j}^{(1)}}{\omega_\nu^2 - (2\omega_j + \omega_k)^2},$$

$$\gamma_1 = -b_{kk}^{(2)} + \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq j}}^{n} \frac{\overline{p_{k\nu}^{(1)}} p_{\nu k}^{(1)}}{\omega_\nu^2 - \omega_j^2} + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{p_{k\nu}^{(1)} \overline{p_{\nu k}^{(1)}}}{\omega_\nu^2 - (\omega_j + 2\omega_k)^2}.$$

II. $N = 2$;

$$\frac{\omega_j + \omega_k}{4} - \varepsilon^2 \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_2}{\omega_j} + \frac{\gamma_2}{\omega_k} \right) + \sqrt{\frac{\delta\eta}{\omega_j\omega_k}} \right] + \ldots < \omega < \frac{\omega_j + \omega_k}{4} -$$

$$-\varepsilon^2\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_2}{\omega_j}+\frac{\gamma_2}{\omega_k}\right)-\sqrt{\frac{\delta\eta}{\omega_j\omega_k}}\right]+\ldots,$$

$$\beta_2=-b_{jj}^{(2)}+4\left[\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_{j\nu}^{(1)}\overline{p_{\nu j}^{(1)}}}{4\omega_\nu^2-(\omega_k-\omega_j)^2}+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\overline{p_{j\nu}^{(1)}}p_{\nu j}^{(1)}}{4\omega_\nu^2-(3\omega_j+\omega_k)^2}\right],$$

$$\gamma_2=-b_{kk}^{(2)}+4\left[\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\overline{p_{k\nu}^{(1)}}p_{\nu k}^{(1)}}{4\omega_\nu^2-(\omega_k-\omega_j)^2}+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_{k\nu}^{(1)}\overline{p_{\nu k}^{(1)}}}{4\omega_\nu^2-(\omega_j+3\omega_k)^2}\right],$$

$$\delta=4\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_{j\nu}^{(1)}p_{\nu k}^{(1)}}{4\omega_\nu^2-(\omega_k-\omega_j)^2}-p_{jk}^{(2)},\qquad \eta=4\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\overline{p_{k\nu}^{(1)}}\overline{p_{\nu j}^{(1)}}}{4\omega_\nu^2-(\omega_k-\omega_j)^2}-\overline{p_{kj}^{(2)}}.$$

III. $N\geqslant 3$;

$$\omega=\frac{\omega_j+\omega_k}{2N}+\varepsilon^2\frac{1}{4N}\left(\frac{\beta_N}{\omega_j}+\frac{\gamma_N}{\omega_k}\right)+\ldots,$$

$$\beta_N=b_{jj}^{(2)}-N^2\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_{j\nu}^{(1)}\overline{p_{\nu j}^{(1)}}}{N^2\omega_\nu^2-[(N-1)\omega_j-\omega_k]^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\overline{p_{j\nu}^{(1)}}p_{\nu j}^{(1)}}{N^2\omega_\nu^2-[(N+1)\omega_j+\omega_k]^2}\right\},$$

$$\gamma_N=b_{kk}^{(2)}-N^2\left\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\overline{p_{k\nu}^{(1)}}p_{\nu k}^{(1)}}{N^2\omega_\nu^2-[(N-1)\omega_k-\omega_j]^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{p_{k\nu}^{(1)}\overline{p_{\nu k}^{(1)}}}{N^2\omega_\nu^2-[(N+1)\omega_k+\omega_j]^2}\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Кочин, О крутильных колебаниях коленчатых валов. Собр. соч. т. 2, Изд-во АН СССР, 1949, стр. 507—535.
2. М. Г. Крейн, Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб., «Памяти А. А. Андронова», Изд-во АН СССР 1955, стр. 413—498.
3. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, ГИТТЛ, 1956.

Поступила 8. VI 1960 г.
Владивосток