Исследование нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы при наличии случайных возмущений

В. Г. Коломиец

Важная проблема изучения влияния слабых случайных сил на колебательные системы, имеющая большое значение в радиотехнике, измерительной технике и т. д., была предметом многочисленных исследований.

Впервые такая задача была сформулирована известными советскими физиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси. Общее рассмотрение влияния случайных сил на нелинейные системы проведено в работе А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина и А. А. Витта в 1933 году [1]. В дальнейшем эта проблема изучалась в работах И. Л. Берштейна, Г. С. Горелика, С. М. Рытова, В. И. Тихонова, Р. Л. Стратоновича [3, 4] и др. для систем, в которых протекает марковский процесс.

Метод учета случайных возмущений является наиболее эффективным подходом к исследованию нелинейных колебательных систем, хотя и осуществляемый с большими трудностями.

В некоторых случаях описываемый здесь метод исследования колебательных систем, находящихся под действием случайных возмущений, можно использовать для получения точного решения задач, связанных с нелинейными колебаниями. Нелинейные задачи можно решать приближенно аналитическим путем при помощи метода Крылова — Боголюбова [2], если только известно, что в системе преобладают режимы колебаний, близкие к гармоническим, т. е. используя линейный анализ для получения приближенных решений нелинейной задачи. В общем случае проблема точного анализа остается нерешенной.

Реальные системы подвержены всегда воздействию систематических и случайных возмущений. В действительности не существует чисто гармонических колебаний. Колебания в действительности являются модулированными; их амплитуда и фаза медленно меняются со временем. Проблема исследования воздействия случайных сил на нелинейные колебательные системы осуществляется сведением реального случайного процесса к процессу без последствия и применения аппарата уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова. Если даже нелинейные колебательные системы с малыми случайными возмущениями описываются дифференциальными уравнениями, близкими к линейным, применение обычных асимптотических методов создает большие затруднения при практическом использовании указанных методов. Однако наличие в таких системах неизбежного внутреннего трения и внешних возмущающих случайных сил приводит к быстрому исчезновению высших частот, что позволяет при исследовании таких колебательных систем рассматривать одночастотный режим, означающий, что все точки системы совершают колебания с одной и той же частотой.

Построение асимптотических приближений в этом случае может быть проведено так же, как и для колебательных систем с одной степенью свободы, так как в этом случае нашу сложную систему можно заменить эквивалентной колебательной системой с одной степенью свободы.

Для анализа укороченных уравнений используется общий метод, развитый А. А. Андроновым [1] для систем, в которых протекает марковский процесс.

В статье рассматривается поведение амплитуды и фазы эквивалентной колебательной системы в случае, когда система находится под действием стационарных случайных возмущений, причем изменение амплитуды и фазы представляет собой марковский процесс.

Применение аппарата уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова требует лишь слабых ограничений, накладываемых на интенсивность случайных возмущений при переходе к укороченным уравнениям. Результатом является статистическое описание колебаний системы в одночастотном режиме.

Как известно, изменение каждой i-й координаты сложной колебательной системы можно приближенно описать с помощью уравнений колебательной системы второго порядка

$$\sum_{s=1}^{n} \{ a_{is}\ddot{x}_s + c_{is}x_s \} = \varepsilon\Phi_i(x_1, \ldots, \dot{x}_n, x_1, \ldots \dot{x}_n) - \xi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots n), \qquad (1)$$

где x_1, x_2 ..., x_n — обобщенные координаты, a_{is}, c_{is} — соответственно инерционные и квазиупругие коэффициенты, Φ_i — некоторые нелинейные функции, представляющие собой полиномы от обобщенных координат и обобщенных скоростей, $\xi_i(t)$ — стационарные случайные процессы типа слабых белых шумов с постоянными спектральными плотностями. Точками в уравнении обозначено дифференцирование по «быстрому» времени t.

Входящие в (1) нелинейности достаточно малы. Все же наличие их приводит к возможности существования в анализируемой системе режимов возбуждения колебаний и к появлению устойчивых предельных циклов. Мы здесь предполагаем, что система обладает устойчивым решением — периодическими движениями и состояниями равновесия при отсутствии влияния слабых шумов.

Уравнения (1) описывают марковские процессы, определяемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений с аддитивными белыми шумами в правых частях. Нас будет интересовать стационарный случайный процесс $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ по истечении большого промежутка времени. При этом используется приближенный метод исследования колебательных процессов, называемый «методом одночастотных колебаний». Для его применимости необходимо выполнение следующих условий:

1) в невозмущенной системе ($\varepsilon = 0$, $\xi_i(t) = 0$) возможны незатухающие колебания с частотой ω_1, зависящие только от двух произвольных постоянных;

2) единственным стационарным решением невозмущенной системы является решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

3) частота ω_1 не является кратной.

К системе (1), если только $\xi_i(t)$ — малые случайные возмущения, полностью применима теория одночастотных колебаний в системах со многими степенями свободы, развитая Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским [2], если считать выполненными указанные выше условия.

Решение нелинейной системы (1) ищем в первом приближении в виде

$$x_i = \varphi_i^{(1)} a \cos(\omega_1 t + \theta) \quad (i = 1, \ldots n), \tag{2}$$

где ω_1 — собственная частота, определяемая характеристическим уравнением

$$\mathrm{Det}\, \| -a_{is}\omega_1^2 + c_{is} \| = 0. \tag{3}$$

Нормальные функции $\varphi_i^{(1)}$, соответствующие собственной частоте ω_1, находим как нетривиальные решения алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \{-a_{is}\omega_1^2 + c_{is}\} \varphi_s^{(1)} = 0. \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Процесс (2) описывает периодические колебания частоты ω_1 со случайными амплитудой и фазой, причем a и θ — медленно изменяющиеся функции времени. Функции времени a и θ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_1} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)} \Phi_i (\varphi_1^{(1)} a \cos\psi, \ldots, \varphi_n^{(1)} a \cos\psi, -a\varphi_1^{(1)}\omega_1 \sin\psi, \ldots$$

$$\ldots, -a\varphi_n^{(1)}\omega_1 \sin\psi + \frac{1}{\omega_1}\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)\sin\psi,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a\omega_1}\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}\Phi_i(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi, \ldots, \varphi_n^{(1)}a\cos\psi, -a\varphi_1^{(1)}\omega_1\sin\psi, \ldots$$

$$\ldots, a\varphi_n^{(1)}\omega_1\sin\psi)\cos\psi + \frac{1}{\omega_1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t)\cos\psi \quad (\psi = \omega_1 t + \theta). \tag{5}$$

Правые части (5) содержат вибрационные функции. Поэтому необходимо исключить вибрационные члены и получить уравнения, которые бы не содержали временных членов. Исключение вибраций из динамических членов достигается путем усреднения за период в предположении постоянства амплитуды и фазы. Случайные члены можно преобразовать путем интегральных канонических разложений В. С. Пугачева [5] к чистым белым шумам, имеющим одинаковые спектральные плотности с исходными в области наиболее существенных частот.

Принимая во внимание указанное выше, получаем систему «укороченных» уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a) + \zeta_1(t),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B(a) + \frac{1}{a}\zeta_2(t), \tag{6}$$

где

$$A(a) = -\frac{1}{2\pi\omega_1}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n}\varphi_s^{(1)}\Phi_s(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi, \ldots, \varphi_n^{(1)}a\cos\psi, \; -\varphi_1^{(1)}\omega_1 a\sin\psi, \ldots,$$

$$\ldots, \; -\varphi_n^{(1)}\omega_1 a\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$B(a) = -\frac{1}{2\pi\omega_1 a}\int_0^{2\pi}\sum_{s=1}^{n}\varphi_s^{(1)}\Phi_s(\varphi_1^{(1)}a\cos\psi, \ldots, \varphi_n^{(1)}a\cos\psi, \; -\varphi_1^{(1)}\omega_1 a\sin\psi, \ldots$$

$$\ldots, -\varphi_n^{(1)}\omega_1 a\sin\psi)\cos\psi \, d\psi,$$

$\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ — эквивалентные белые шумы, имеющие автокорреляционные функции вида

$$\overline{\zeta_1(t)\,\zeta_1(t+\tau)} = N\delta(\tau), \quad \overline{\zeta_2(t)\,\zeta_2(t+\tau)} = N\delta(\tau). \tag{7}$$

Для дальнейшего необходимо, чтобы коэффициент N был достаточно малым.

На практике довольно часто интересуются установившимися колебаниями. Это связано с тем, что всякие нестационарные колебания после довольно быстрого переходного периода приближаются к стационарным, характеризующимся постоянством амплитуды и фазы.

По предположению система (6) обладает устойчивым предельным циклом, определяемым из уравнения $A(a) = 0$ при выполнении условия $A'(a_0) < 0$.

Наличие малых случайных возмущений приводит к тому, что система будет совершать малые флуктуационные колебания вблизи устойчивого предельного цикла. Эти колебания можно представить как некоторый стационарный процесс. Для рассмотрения влияния возмущений $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ введем

$$a = a_0 + z, \quad \theta = \theta_0 + \chi, \tag{8}$$

где a_0 является корнем уравнения $A(a) = 0$, а θ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\theta_0}{dt} = \varepsilon B(a_0). \tag{9}$$

Тогда для z и χ получим такие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \varepsilon A'(a_0)\, z + \zeta_1(t), \\ \frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{a_0}\zeta_2(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрение случайных отклонений z и χ осуществим статистически при помощи уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова. Согласно первому уравнению (11) для стационарной плотности распределения амплитуды получим

$$P(z) = C \exp\left\{\frac{\varepsilon}{N} A'(a_0)\, z^2\right\}, \tag{11}$$

где постоянная C определяется из условия нормировки.

Нетрудно видеть, что дисперсия амплитуды будет расти пропорционально N. Для χ получим диффузионный закон, согласно которому фаза растет прямо пропорционально времени с коэффициентом пропорциональности N.

Из этого анализа видно, что вероятность возникновения нарастающих колебаний в течение определенного промежутка времени зависит от интенсивности флуктуаций, вызванных случайными возмущениями, причем эта вероятность резко падает с уменьшением интенсивности. Поэтому, если амплитудные флуктуации малы, система будет продолжительно оставаться в устойчивом одночастотном режиме, совершая малые флуктуационные колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, Собр. тр., Изд-во АН СССР, 1956.
2. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
3. П. С. Ланда, Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, серия III, Физика и астрономия, № 1, 1962.
4. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, Изд-во «Сов. радио.» М., 1961.
5. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1960.

Поступила 20. VI 1962 г.
Киев