Определение областей аналитичности вкладов диаграмм, соответствующих рассеянию нуклонов на нуклонах, π-мезонов на нуклонах и K-мезонов на нуклонах

И. И. Костырко

Исследование аналитических свойств вкладов диаграмм как функций от инвариантов представляет большой интерес. Этой проблеме посвящено много работ [1—3]. Недавно вышла статья Т. Т. Ву [4], в которой найдена область аналитичности по действительным s, t для случая рассеяния двух частиц с равными массами. Также для случая равных масс И. Г. Тейлор [5] и Д. Я. Петрина [6] показали, что из аналитичности вкладов диаграмм Фейнмана как функций s и t в области Т. Т. Ву следует, что парциальные волны являются аналитическими функциями по энергетической переменной в комплексной плоскости с разрезами вдоль действительной оси. В связи с этим представляет интерес нахождение области аналитичности по аналогичным переменным для случая рассеяния частиц с разными массами и при учете правил отбора, чтобы изучить затем аналитические свойства парциальных волн.

В данной заметке найдена область аналитичности по переменным s, t вкладов от диаграмм, соответствующих процессам рассеяния нуклонов на нуклонах. Кроме того, показано, что для рассеяния π-мезонов на нуклонах и K-мезонов на нуклонах не существует общей области аналитичности, описывающей одновременно процессы рассеяния, проходящие по трем каналам (прямое рассеяние, перекрестное рассеяние и нуклон-антинуклонная аннигиляция в два π-мезона или два K-мезона). Однако существуют пересечения областей аналитичности, описывающие процессы, проходящие по первым двум каналам для рассеяния π-мезонов на нуклонах и K-мезонов на нуклонах.

1. Рассмотрим сначала процессы рассеяния π-мезонов на π-мезонах.

Как показал Н. Наканиши [7], общий вклад, соответствующий диаграмме Фейнмана, имеет в любом порядке теории возмущений следующий вид

$$\mathrm{const} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{\delta\left(1-\sum\limits_{i=1}^{N} x_i\right) \prod\limits_{i=1}^{N} dx_i}{U^2 (V - i\varepsilon)^{N-2n}}, \tag{1}$$

где N — число внутренних линий диаграммы, n — число независимых контуров, x — параметры Фейнмана.

Определение функций U и V дано в этой же работе Н. Наканиши [7].

Общий вклад (1), соответствующий диаграмме Фейнмана, допускает следующее интегральное представление [7]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int\limits_0^1 dx \frac{\varrho_{12}(\alpha, x)}{\alpha - xs - (1-x)t - i\varepsilon} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta \int\limits_0^1 dy \frac{\varrho_{23}(\beta, y)}{\beta - yt - (1-y)u - i\varepsilon} +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\gamma \int\limits_0^1 dz \frac{\varrho_{31}(\gamma, z)}{\gamma - zu - (1-z)s - i\varepsilon}, \tag{2}$$

причем ограничение на носитель функции ϱ_{12} задается неравенством

$$\alpha \geqslant (2m_\pi)^2, \tag{3}$$

где m_π — масса π — мезона.

Аналогичные неравенства можно написать и для функций ϱ_{23} и ϱ_{31}.

Используя интегральное представление (2) и учитывая неравенство (3), можно определить область аналитичности для общего вклада диаграммы как функции действительных s и t для случая равных масс, которую другими методами получили Р. Иден [2] и Т.Т. Ву [4].

Искомая область аналитичности вклада от диаграммы будет, очевидно, состоять из тех точек $\{s, t\}$, для которых знаменатели (2) отличны от нуля для всех x, y, z из отрезка [0, 1] и для всех α, β, γ, удовлетворяющих неравенству (3).

На примере первого члена (2) (эти рассуждения будут справедливы и для общего случая) покажем, что для определения области аналитичности достаточно подставить в знаменатель этого члена нижнюю границу α и найти, для каких точек $\{s, t\}$ знаменатель всегда больше нуля при всех x из отрезка $[0, 1]$. Совокупность этих точек и будет составлять область аналитичности первого члена (2) (назовем ее K). Действительно, выражение (3) можно записать в виде

$$\alpha \geqslant (2m_\pi)^2 x + (2m_\pi)^2(1 - x). \tag{4}$$

Подставим нижнюю границу (4) в знаменатель первого члена (2) и найдем те точки $\{s, t\}$, для которых знаменатель всегда больше нуля для всех x из отрезка $[0, 1]$, т. е. найдем такие $\{s, t\}$, для которых всегда выполняется неравенство

$$x[(2m_\pi)^2 - s] + (1 - x)[(2m_\pi)^2 - t] > 0. \tag{5}$$

Так как $x \geqslant 0$ и $(1-x) \geqslant 0$, то неравенство (5) будет выполняться для всех x из отрезка $[0, 1]$ только тогда, когда каждая из квадратных скобок больше нуля. Отсюда область аналитичности K определится неравенствами

$$s < (2m_\pi)^2, \quad t < (2m_\pi)^2. \tag{6}$$

Если подставить в знаменатель первого члена (2) $\alpha > (2\ m_\pi)^2$, т. е. значение большее нижней границы, то для точек $\{s, t\} \in K$ знаменатель тем более никогда не обратится в нуль. Учитывая (5), легко убедиться, что знаменатель может равняться нулю, в зависимости от изменения α хотя бы для некоторого x из отрезка $[0, 1]$ для следующих точек $[s, t]$ (обозначим их совокупность через K_1)

$$s \geqslant (2m_\pi)^2, \text{ или } t \geqslant (2m_\pi)^2, \tag{7}$$

и, соответственно, может быть меньше нуля для следующих $\{s, t\}$ (область K_2)

$$s > (2m_\pi)^2, \text{ или } t > (2m_\pi)^2. \tag{8}$$

Область $K_2 \subset K_1$; это значит, что когда знаменатель первого члена (2) меньше нуля для всех x из отрезка $[0, 1]$, то для $[s, t] \in K_2$ можно подобрать такое α из области его определения (3), чтобы знаменатель обратился в нуль. Если же знаменатель больше нуля для всех x из отрезка $[0, 1]$, то для $[s, t] \in K$ невозможно подобрать такое α, чтобы он обратился в нуль. Следовательно, K и есть область аналитичности для первого члена (2).

Таким образом, для получения области аналитичности одного из членов интегрального представления (2) достаточно подставить в знаменатель этого члена нижнюю границу α или β, или γ найти, для каких точек $\{s, t\}$ знаменатель всегда будет положительным при соответственно всех x, или y, или z из отрезка $[0, 1]$. Совокупность этих точек $\{s, t\}$ и составляет область аналитичности этого члена.

Области аналитичности K', K'' от второго и третьего членов (2) соответственно для рассеяния π-мезонов на π-мезонах находим аналогичным образом. Заметим, что β и γ представления (2) определяются соотношениями:

$$\begin{gathered} \beta \geqslant (2m_\pi)^2 = (2m_\pi)^2 y + (2m_\pi)^2(1 - y), \\ \gamma \geqslant (2m_\pi)^2 = (2m_\pi)^2 z + (2m_\pi)^2(1 - z). \end{gathered} \tag{9}$$

Очевидно, что области K' и K'' имеют вид

$$t < (2m_\pi)^2, \quad u < (2m_\pi)^2; \tag{10}$$

$$u < (2m_\pi)^2, \quad s < (2m_\pi)^2. \tag{11}$$

Так как

$$s + t + u = (2m_\pi)^2, \tag{12}$$

то области (10) и (11) можно выразить в переменных s, t:

$$t < (2m_\pi)^2, \quad s > -t; \tag{13}$$

$$s > -t, \quad s < (2m_\pi)^2. \tag{14}$$

Пересечение областей K, K' и K'' дает область аналитичности, другими методами полученную Т. Т. Ву [4] и Р. Иденом [2],

$$s < (2m_\pi)^2, \quad t < (2m_\pi)^2, \quad u < (2m_\pi)^2. \tag{15}$$

2. Рассмотрим теперь случай рассеяния нуклонов на нуклонах и попытаемся найти область аналитичности для этого процесса. Интегральное представление для вкладов диаграмм, соответствующих нуклон-нуклонному рассеиванию, записывается в виде (2).

Заметим, что ограничения на носители функций ϱ_{12}, ϱ_{23}, ϱ_{31} задаются соответственно следующими неравенствами [7]:

$$\alpha \geqslant (2m_N)^2 x + (2m_\pi)^2 (1 - x), \tag{16}$$

$$\beta \geqslant \min [(2m_\pi)^2 y + (2m_N)^2 (1 - y), \ (2m_N)^2 y + (2m_\pi)^2 (1 - y)], \tag{17}$$

$$\gamma \geqslant (2m_\pi)^2 z + (2m_N)^2 (1 - z), \tag{18}$$

где m_π— массы π-мезонов, m_N — массы нуклонов. Учитывая (16) и (18), находим области аналитичности соответственно первого и третьего членов интегрального представления (2) для случая $N - N$ рассеяния (обозначим их через P и P'')

$$s < (2m_N)^2, \quad t < (2m_\pi)^2; \tag{19}$$

$$u < (2m_\pi)^2, \quad s < (2m_N)^2. \tag{20}$$

Так как для нуклон-нуклонного рассеяния справедливо соотношение

$$s + t + u = (2m_N)^2, \tag{21}$$

то в переменных s, t область P'' выражается следующим образом

$$\begin{gathered} s > -t + (2m_N)^2 - (2m_\pi)^2, \\ s < (2m_N)^2. \end{gathered} \tag{22}$$

Область аналитичности второго члена (2) для случая рассеяния нуклонов на нуклонах находится несколько другим путем. Это обусловлено тем, что β определяется одним из неравенств (17), которое гарантирует ему в зависимости от изменения y минимальное значение. Так как масса нуклона больше массы π-мезона, то при изменении y на отрезках $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$ нижние границы β будут соответственно

$$\beta = (2m_N)^2 y + (2m_\pi)^2 (1 - y), \tag{23}$$

$$\beta = (2m_\pi)^2 y + (2m_N)^2 (1 - y). \tag{24}$$

Найдем, при каких u и t для всех y из отрезков $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ знаменатель второго члена интегрального представления (2) всегда больше нуля (обозначим эти области P_1' и P_2' соответственно). Нетрудно определить, что области P_1' и P_2' имеют вид

$$t < (2m_N)^2, \quad u < (2m_\pi)^2; \tag{25}$$

$$t < (2m_\pi)^2, \quad u < (2m_N)^2. \tag{26}$$

Так как при нахождении области аналитичности знаменатель интегрального представления должен быть больше нуля при всех y из отрезка $[0, 1]$, то пересечение областей P_1' и P_2' образует область аналитичности второго члена интегрального представления (2) (обозначим ее P'):

$$t < (2m_\pi)^2, \quad u < (2m_\pi)^2, \tag{27}$$

или в переменных s, t

$$\begin{aligned} &t < (2m_\pi)^2, \\ &s > -t + (2m_N)^2 - (2m_\pi)^2. \end{aligned} \tag{28}$$

А пересечение областей P, P', P'', выраженных формулами (19), (22) и (28), образует область аналитичности вкладов от диаграмм, соответствующих рассеянию нуклонов на нуклонах,

$$s < (2m_N)^2, \quad t < (2m_\pi)^2, \quad u < (2m_\pi)^2. \tag{29}$$

3. Найдем теперь область аналитичности вкладов от диаграмм, соответствующих рассеянию π-мезонов на нуклонах. Интегральное представление для вклада от диаграмм, соответствующих этому процессу, имеет вид (2), причем инварианты s, t, u связаны соотношением

$$s + t + u = 2(m_N^2 + m_\pi^2). \tag{30}$$

Ограничения на носители функций ϱ_{12}, ϱ_{23}, ϱ_{31} задаются соответственно следующими неравенствами [7]

$$\alpha \geqslant (m_N + m_\pi)^2 x + (2m_\pi)^2 (1 - x), \tag{31}$$

$$\beta \geqslant (2m_\pi)^2 y + (m_N + m_\pi)^2 (1 - y), \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \gamma \geqslant \max [\, &(m_N + m_\pi)^2 z + \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\} (1 - z),\ \{(m_N - m_\pi)^2 + \\ &+ (2m_\pi)^2\} z + (m_N + m_\pi)^2 (1 - z)\,]. \end{aligned} \tag{33}$$

Учитывая (31) и (32), находим области аналитичности соответственно первого и второго членов интегрального представления (2) для случая рассеяния π-мезонов на нуклонах (обозначим эти области S, S'):

$$s < (m_N + m_\pi)^2, \quad t < (2m_\pi)^2; \tag{34}$$

$$t < (2m_\pi)^2, \qquad u < (m_N + m_\pi)^2. \tag{35}$$

Заметим, что в переменных s, t область S' имеет вид

$$t < (2m_\pi)^2, \ s > -t + (m_N - m_\pi)^2. \tag{36}$$

Нахождение области аналитичности третьего члена (2) для рассеяния π-мезонов на нуклонах (обозначим ее S'') подобно нахождению области аналитичности P' для рассеяния нуклонов на нуклонах; γ определяется тем из неравенств (33), которое гарантирует ему в зависимости от изменения z максимальное значение. Так как $m_N \cong 6{,}8\ m_\pi$, то при изменении z на отрезках $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$ нижние границы γ будут соответственно

$$\gamma = \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\} z + (m_N + m_\pi)^2 (1 - z), \tag{37}$$

$$\gamma = (m_N + m_\pi)^2 z + \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\} (1 - z). \tag{38}$$

Для всех z из отрезков $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ знаменатель третьего члена интегрального представления (2) π-мезон нуклонного рассеяния будет всегда больше нуля соответственно для следующих s и t (обозначим эти области S_1'' и S_2''):

$$u < \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\}, \quad s < (m_N + m_\pi)^2; \tag{39}$$

$$u < (m_N + m_\pi)^2, \quad s < \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\}. \tag{40}$$

Пересечение областей S_1'' и S_2'' является областью аналитичности третьего члена интегрального представления (2) рассеяния π-мезонов на нуклонах:

$$s < \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\}, \quad u < \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\}. \tag{41}$$

В переменных s, t область S'' имеет вид

$$\begin{aligned} &s < \{(m_N - m_\pi)^2 + (2m_\pi)^2\}, \\ &s > -t + (m_N + m_\pi)^2 - (2m_\pi)^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Для отыскания области аналитичности вкладов от диаграмм, соответствующих рассеянию π-мезонов на нуклонах, необходимо, чтобы существовало пересечение областей S, S', S'', заданых неравенствами (34), (36), (42). Непосредственным построением убеждаемся условием, что область S пересекается с областью S', т. е. существует общая область аналитичности, описывающая процессы рассеяния π-мезонов на нуклонах, проходящие по двум каналам (прямое рассеяние и перекрестное). Однако область S'' не пересекается с областями S и S', следовательно, не имеется общей области аналитичности, описывающей одновременно процессы рассеяния π-мезонов на нуклонах, проходящие по трем каналам (прямое рассеяние, перекрестное и нуклон-антинуклонную аннигиляцию в два π-мезона).

4. Наконец, рассмотрим процессы рассеяния K-мезонов на нуклонах и попытаемся найти область аналитичности для этих процессов. Интегральное представление для вклада от диаграмм, соответствующих процессам рассеяния K-мезонов на нуклонах, также записывается в виде (2), причем инварианты s, t, u связаны соотношением

$$s + t + u = 2(m_N^2 + m_K^2). \tag{43}$$

Заметим, что ограничения на носители функций ϱ_{12}, ϱ_{23}, ϱ_{31} задаются соответственно следующими неравенствами [7]

$$\alpha > (m_N + m_K)^2 x, \tag{44}$$

$$\beta > (m_\Lambda + m_\pi)^2 (1 - y), \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \gamma > \max [(m_\Lambda^2 + m_\pi^2)\, z + \{2m_N^2 + 2m_K^2 - (m_\Lambda + m_\pi)^2\}(1 - z), (m_N - m_K)^2 z + \\ + (m_N + m_K)^2 (1 - z)], \end{aligned} \tag{46}$$

где m_k — масса K-мезона, m_Λ — масса Λ-гиперона. Очевидно, что области аналитичности от первого и второго членов интегрального представления (2) для рассеяния K-мезонов на нуклонах соответственно имеют вид (обозначим эти области M и M')

$$s < (m_N + m_K)^2, \quad t < 0; \tag{47}$$

$$t < 0, \quad s > -t + 2(m_N^2 + m_K^2) - (m_\Lambda + m_\pi)^2. \tag{48}$$

Нахождение области аналитичности третьего члена интегрального представления (2) для рассеяния K-мезонов на нуклонах аналогично нахождению областей P' нуклон-нуклонного и S'' π-мезон-нуклонного рассеяния. Поэтому, не приводя подробных рассуждений, заметим, что область аналитичности третьего члена представления (2) для рассеяния K-мезонов на нуклонах (обозначим ее M'') запишется в виде

$$\begin{aligned} &s < \{2m_N^2 + 2m_K^2 - (m_\Lambda + m_\pi)^2\}, \\ &s > -t + (m_N + m_K)^2. \end{aligned} \tag{49}$$

Принимая во внимание форму областей M, M', M'', можно сделать выводы, аналогичные тем, которые были сделаны в случае рассеяния π-мезонов на нуклонах, а именно: область M пересекается с областью M'. Область же M'' не пересекается с областями M и M'; следовательно, не существует общей области аналитичности, описывающей одновременно процессы рассеяния K-мезонов на нуклонах, проходящие по трем каналам (прямое, перекрестное рассеяние и аннигиляцию двух K-мезонов в нуклон и антинуклон).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Владимиров, О двойном спектральном представлении амплитуды Фейнмана для диаграмм четвертого порядка, УМЖ, т. 12, 1960, 132—146.
2. R. Eden, Analytic Structure of Collision Amplitudes in Perturbation Theory, Phys. Rev., v. 119, 1960, 1763—1783.
3. J. Tarski, Analyticity of the Fourth Order Scattering Amplitude with Two Complex Invariants, J. Math. and Phys., v. 1, 1960, 149—163.
4. T. T. Wu, Domains of Definition for Feynman Integrals over Real Feynman Parametets, Phys. Rev., v. 123, 1961, 678—689.
5. J. G. Taylor, Analyticity and Crossing for Partial Waves, Nuovo Cimento, v. 22, 1961, 92—101.
6. Д. Я. Петрина, Аналитические свойства парциальных волн амплитуды рассеивания в теории возмущений, Доклады АН СССР, т. 144, 1962, 755—758.
7. N. Nakanishi, Integral Representation for Scattering Amplitudes in Perturbation Theory, Prog Theor. Phys., v. 26, 1960, 337—355.

Поступила 22. II 1962 г.
Киев