Однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором

Т. П. Марьянович

В классических задачах теории массового обслуживания предполагается, что приборы системы могут работать как угодно долго. Однако за последние годы круг приложений теории массового обслуживания значительно расширился. Возникли новые постановки задач, в которых существенно необходимо учитывать возможность выхода приборов системы из строя. На необходимость решения такого рода задач внимание автора было обращено Б. В. Гнеденко, работы которого [1, 2] явились отправным пунктом ряда дальнейших исследований надежности систем массового обслуживания. В [3] исследуется система с потерями; здесь изучается однолинейная система с очередью.

Мы начнем с рассмотрения простейшего случая однолинейной системы, содержащей ненадежный прибор, а именно, будем предполагать, что *прибор* может выйти из строя только тогда, когда он не занят обслуживанием требования. С практической точки зрения такое предположение может вызвать обоснованное возражение. Но в дальнейшем мы увидим, что общая задача исследования однолинейной системы, содержащей ненадежный прибор, сводится к этой частной.

Рассмотрим систему обслуживания, содержащую один прибор. Пусть в систему поступает пуассоновский с параметром λ поток требований. Поступающие требования образуют очередь, в порядке которой производится их обслуживание. Время обслуживания требования будем предполагать случайной величиной, распределенной по закону $F(x)$ и $\mu = \int_0^\infty [1-F(x)] \times \times dx < \infty$. Обслуживающий прибор, будучи свободным, в случайные моменты времени может выйти из строя. Если в момент времени t система освободилась от ранее поступивших требований и до момента $t+x$ новые требования не поступили, то за время x прибор может выйти из строя с вероятностью $H_0(x) = \int_0^x h_0(t)dt$. Другими словами, $H_0(x)$ является распределением срока службы прибора в свободном состоянии. После выхода прибора из строя начинается его восстановление, длящееся случайный промежуток времени с распределением $G_0(x)$ и

$$\tau_0 = \int_0^\infty [1 - G_0(x)]\, dx < \infty.$$

Если за время ремонта прибора поступят требования, то их обслуживание начинается после окончания восстановления прибора.

Рассмотрим случайный процесс $\nu(t) = \{e(t), \gamma(t)\}$, где $e(t) = 0$, если в момент t прибор исправен и в системе отсутствуют требования, и $e(t) = 1$, если в момент t прибор не исправен или занят обслуживанием требования. В случае $e(t) = 0$ величина $\gamma(t)$ означает время с момента t до момента выхода прибора из строя, если бы требования больше не поступали. В случае $e(t) = 1$ величина $\gamma(t)$ означает время с момента t до момента освобождения прибора от ранее поступивших требований. Стало быть, если прибор свободен и исправен, то $\gamma(t)$ означает остаток его срока службы в свободном состоянии, если же прибор не свободен, то $\gamma(t)$ представляет собой время ожидания начала обслуживания требованием, если бы оно поступило в момент времени t.

Пусть

$$R_i(x, t) = P\{e(t) = i, \gamma(t) < x\},$$

$$R_i(x) = \lim_{t\to\infty} R_i(x, t) \quad (i = 0, 1).$$

Имеет место следующая теорема, принадлежащая И. Н. Коваленко.

Теорема 1. *Предел $R_i(x) = \lim_{t\to\infty} R_i(x, t)$ всегда существует. При $\varrho = \lambda\mu > 1$ этот предел равен нулю при любом конечном x; если $\varrho < 1$, то преобразования Лапласа—Стилтьеса функций $R_i(x)$ даются соотношениями*

$$\mathfrak{R}_0(s) = \frac{\lambda(1-\varrho)[\mathfrak{H}_0(\lambda) - \mathfrak{H}_0(s)]}{(s-\lambda)[1-\mathfrak{H}_0(\lambda)(1-\lambda\tau_0)]}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{R}_1(s) = \frac{\lambda(1-\varrho)\{1-\mathfrak{F}(s) + \mathfrak{H}_0(\lambda)[\mathfrak{F}(s) - \mathfrak{G}_0(s)]\}}{\{s-\lambda[1-\mathfrak{F}(s)]\}[1-\mathfrak{H}_0(\lambda)(1-\lambda\tau_0)]}, \tag{2}$$

где готическими буквами обозначены преобразования Лапласа — Стилтьеса соответствующих функций.

Формулы (1) и (2) позволяют определять различные полезные характеристики системы обслуживания. Так, например, преобразование Лапласа—Стилтьеса $\Phi(s)$ распределения времени ожидания $\omega(t)$ равно

$$\Phi(s) = Me^{-s\omega(t)} = \mathfrak{R}_0(0) + \mathfrak{R}_1(s). \tag{3}$$

Теперь мы рассмотрим нашу систему в случае, когда прибор может выходить из строя также в занятом состоянии. Пусть относительно выхода из строя и восстановления прибора в свободном состоянии предпосылки остаются прежними. Если же в момент t прибор начал и за время $(t, t+x)$ не окончил обслуживать требование, то за время x он может выйти из строя с вероятностью $H(x) = \int_0^x h(t)dt$. Если обслуживание требования было завершено и прибор не вышел из строя, то при поступлении на обслуживание нового требования промежуток непрерывной работы прибора опять распределен по закону $H(x)$. Требование, при обслуживании которого прибор вышел из строя, затратив при этом время x, возвращается в очередь и может ожидать окончания восстановления прибора в течение случайного промежутка времени с распределением $\Phi_x(y)$. В частности, это требование сразу покинет систему, если $\Phi_x(y) \equiv 1$, либо обязательно дождется окончания восстановления прибора, если $\Phi_x(y) \equiv 0$. Время восстановления прибора, вышедшего из строя в занятом состоянии, подчинено распределению $G_x(y)$.

Поведение рассматриваемой системы обслуживания можно изучить с помощью введенного нами ранее марковского процесса $\mathbf{v}(t)$, придав несколько иной смысл компоненте $\gamma(t)$. Именно, если в момент t прибор не свободен, то $\gamma(t)$ означает промежуток времени от момента t до того момента, когда прибор придет в состояние готовности обслуживать требование, если бы оно поступило в момент t. То есть, в компоненту $\gamma(t)$ включается в этом случае также возможное время восстановления прибора и повторные обслуживания требований после ремонта прибора.

Теорема 2. *Если выполнено условие*

$$1 - \int_0^\infty \int_0^\infty [1 - F(y)][1 - \Phi_y(z)]\, dH(y) dG_y(z) > \lambda \int_0^\infty \Big\{ 1 -$$

$$- \int_0^x [1 - H(y)]\, dF(y) - \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{x-y} [1 - F(y)] dH(y)\, dG_y(z) \Big\} dx, \tag{4}$$

то процесс $\mathbf{v}(t)$ *эргодичен и существует предел* $R_i(x) = \lim_{t\to\infty} R_i(x, t)$.

Пусть ζ означает промежуток времени от начала обслуживания данного требования до момента, когда это требование покинет систему, и прибор будет готов обслуживать очередное требование. Другими словами, величина ζ означает затрату времени обслуживающим прибором на одно требование с учетом возможного выхода из строя и восстановления прибора, то есть ζ в нашем случае соответствует времени обслуживания требования в обычной системе с очередью. Пусть $\Psi(x) = P\{\zeta < x\}$. Событие $\zeta < x$ будет иметь место при осуществлении следующих несовместимых событий

1) Для обслуживания требования понадобилось время $0 < y < x$ и за это время прибор не вышел из строя. Вероятность этого события равна

$$\int_0^x [1 - H(y)]\, dF(y).$$

2) При обслуживании требования прибор проработал время $0 < y < x$ и вышел из строя, не окончив его обслуживание. За время $0 < z < x - y$ восстановление прибора было завершено, но требование покинуло очередь, не дождавшись окончания восстановления прибора. Вероятность этого события равна

$$\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)]\,\Phi_y(z)\,dH(y)\,dG_y(z).$$

3) Прибор проработал время $0 < y < x$ и вышел из строя. Требование возвратилось в очередь и после окончания восстановления прибора, длившегося время $0 < z < x - y$, поступило на обслуживание. За оставшееся время $x - y - z$ прибор перешел в состояние готовности обслуживать новое требование. Вероятность этого события равна

$$\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)]\,[1-\Phi_y(z)]\,\Psi(x-y-z)\,dH(y)\,dG_y(z).$$

Таким образом, для функции $\Psi(x)$ получаем интегральное уравнение

$$\Psi(x)=\int_0^x[1-H(y)]\,dF(y)+\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)]\,\Phi_y(z)\,dH(y)\,dG_y(z)+$$

$$+\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)]\,[1-\Phi_y(z)]\,\Psi(x-y-z)\,dH(y)\,dG_y(z).$$

Пусть $\mu=\int_0^\infty[1-\Psi(x)]\,dx$. Тогда получим

$$\mu=\int_0^\infty\Big\{1-\int_0^x[1-H(y)]\,dF(y)-\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)]\,dH(y)\,dG_y(z)\Big\}\,dx+$$

$$+\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)][1-\Phi_y(z)][1-\Psi(x-y-z)]\,dH(y)\,dG_y(z)\,dx=$$

$$=\int_0^\infty\Big\{1-\int_0^x[1-H(y)]\,dF(y)-\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)]\,dH(y)\,dG_y(z)\Big\}\,dx+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty[1-F(y)][1-\Phi_y(z)][1-\Psi(t)]\,dH(y)\,dG_y(z)\,dt.$$

То есть

$$\mu=\frac{\int_0^\infty\Big\{1-\int_0^x[1-H(y)]\,dF(y)-\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{x-y}[1-F(y)]\,dH(y)dG_y(z)\Big\}\,dx}{1-\int_0^\infty\int_0^\infty[1-F(y)][1-\Phi_y(z)]\,dH(y)\,dG_y(z)}$$

и теорема 2 является следствием теоремы 1, если выполнено условие (4). Вопрос о распределении времени ожидания решается формулой (3).

Во многих случаях важной характеристикой системы с ожиданием является распределение длины очереди, так как система работает успешно в том случае, когда очередь требований, ожидающих начала обслуживания, как можно меньше. Для изучения распределения длины очереди введем следующие дополнительные предположения. Будем считать, что $H_0(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ и $G_x(y) = G(y)$. Введем вероятностный процесс $\nu(t) = \{i, j, x, y;\ t\}$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$ означает число требований в системе в момент t, $j = 0,1$ определяет соответственно «рабочее» и «нерабочее» состояния прибора; x означает время, затраченное к моменту t на обслуживание требования.

и y — время, затраченное к моменту t на восстановление прибора, если он неисправен.

Пусть $p_{ij}(x, y; t)$ означает вероятность того, что система находится в момент t в состоянии $[i, j, x, y]$. Обычным приемом, используя переходные вероятности процесса $\nu(t)$ за малый промежуток времени, для величин $p_{ij}(x, y; t)$ можно получить систему интегро-дифференциальных уравнений. Если выполнены условия теоремы 2, то процесс $\nu(t)$ эргодичен и существует $p_{ij}(x, y) = \lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(x, y; t)$. С целью экономии места мы приведем готовый результат для стационарных вероятностей $p_{ij}(x, y)$. Пусть

$$\pi_{i0}(x) = p_{i0}(x)\{[1 - H(x)][1 - F(x)]\}^{-1},$$

$$\pi_{i1}(y) = p_{i1}(y)[1 - G(y)]^{-1},$$

$$\pi_{i1}(x,y) = p_{i1}(x,y)\{1 - G(y)][1 - \Phi_x(y)]\}^{-1}.$$

Для этих величин имеет место система уравнений

$$(\lambda + \alpha)\, p_{00} = \int\limits_0^\infty \pi_{10}(x)[1 - H(x)]dF(x) + \int\limits_0^\infty \pi_{01}(y)\, dG(y),$$

$$\frac{d\pi_{i0}(x)}{dx} = -\lambda\pi_{i0}(x) + \lambda\pi_{i-10}(x),$$

$$\frac{d\pi_{i1}(y)}{dy} = -\lambda\pi_{i1}(y) + \lambda\pi_{i-11}(y) + \int\limits_0^\infty \pi_{i+11}(x, y)\,\frac{\partial\Phi_x(y)}{\partial y}[1 - G(y)]\, dx,$$

$$\frac{\partial\pi_{i1}(x, y)}{\partial y} = -\lambda\pi_{i1}(x, y) + \lambda\pi_{i-11}(x, y).$$

С граничными условиями —

$$\pi_{01}(0) = \alpha p_{00} + \int\limits_0^\infty \pi_{10}(x)[1 - F(x)]\,\Phi_x(0)\, dH(x),$$

$$\pi_{i1}(0) = \int\limits_0^\infty \pi_{i+10}(x)[1 - F(x)]\,\Phi_x(0)\, dH(x),$$

$$\pi_{10}(0) = \lambda p_{00} + \int\limits_0^\infty \pi_{20}(x)[1 - H(x)]\, dF(x) + \int\limits_0^\infty \pi_{11}(y)\, dG(y) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \pi_{11}(x, y)[1 - \Phi_x(y)]\, dG(y)\, dx,$$

$$\pi_{i0}(0) = \int\limits_0^\infty \pi_{i+10}(x)[1 - H(x)]\, dF(x) + \int\limits_0^\infty \pi_{i1}(y)\, dG(y) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \pi_{i1}(x, y)[1 - \Phi_x(y)]\, dG(y)\, dx,$$

$$\pi_{i1}(0, y) = 0,\ \ \pi_{i1}(x, 0) = \pi_{i0}(x)[1 - \Phi_x(0)]\, h(x).$$

Решением приведенной системы уравнений является следующий набор функций

$$\pi_{i0}(x) = \sum_{k=1}^{i} \pi_{k0}(0)\,\frac{(\lambda x)^{i-k}}{(i-k)!}e^{-\lambda x},$$

$$\pi_{i1}(x, y) = \sum_{k=1}^{i} \pi_{k1}(x, 0) \frac{(\lambda y)^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\lambda y},$$

$$\pi_{i1}(y) = \sum_{k=0}^{i} [\pi_{k1}(0) + g_k] \frac{(\lambda y)^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\lambda y},$$

где

$$g_k = \int_0^\infty \int_0^\infty \pi_{k+11}(x, y) \frac{\partial \Phi_x(y)}{\partial y} e^{\lambda y} [1 - G(y)]\, dx dy,$$

а величины $\pi_{kj}(0)$ определяются через p_{00} из граничных условий. Интегрированием приведенного решения системы от 0 до ∞ получим величины p_{ij} и следующую формулу для распределения длины очереди

$$p_i = [\pi_{01}(0) + g_0] \frac{\lambda^i \theta_i}{i!} + \sum_{k=1}^{i} \frac{\lambda^{i-k}}{(i-k)!} [\nu_{i-k} + \theta_{i-k}(\pi_{k1}(0) + g_k) + \mu_{i-k}\pi_{k0}(0)],$$

где

$$\mu_{i-k} = \int_0^\infty x^{i-k} [1 - H(x)] [1 - F(x)] e^{-\lambda x}\, dx,$$

$$\nu_{i-k} = \int_0^\infty \int_0^\infty \pi_{k1}(x, 0)\, y^{i-k} [1 - G(y)] [1 - \Phi_x(y)]\, e^{-\lambda y} dx dy,$$

$$\theta_{i-k} = \int_0^\infty y^{i-k} [1 - G(y)] e^{-\lambda y} dy.$$

В случае, когда распределение времени восстановления прибора зависит от того, сколько времени длилось обслуживание последнего перед выходом прибора из строя требования, задача сводится к решению аналогичной системы, но с несколько иными граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнєденко, Про одне узагальнення формул Ерланга, ДАН УРСР, № 4, 1959.

2. Б. В. Гнеденко, Об одной задаче массового обслуживания. Trans. Second Prague Conf. on Inf. Thery, Stat. dec. Funktions, Random Proc., 1959.

3. Т. П. Марьянович, Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться, УМЖ т. XII, № 3, 1960.

Поступила 30. VIII 1962 г.

Киев