Бесконечно малые изгибания кусочно-регулярных поверхностей вращения отрицательной кривизны

В. И. Михайловский

В предыдущих работах [2, 3, 4] теоремы о бесконечно малых изгибаниях поверхностей отрицательной кривизны доказывались при условии, что поверхность F и ее изгибающее поле $\vec{z}(u, v)$ принадлежат классу C^2. В данной работе покажем, что все эти результаты справедливы для случая, когда поверхность F принадлежит кусочно классу C^2, а в целом — классу C. Говоря о бесконечно малых изгибаниях кусочно-регулярной поверхности, мы будем считать изгибающее поле $\vec{z}(u, v)$ регулярным класса C^2 на каждом из регулярных кусков поверхности F и непрерывным на всей поверхности. Более подробно остановимся на обобщении результатов работы [2]. Результаты работ [3, 4] обобщаются аналогично.

Пусть $F : \vec{x}(u, v) = u\vec{k} + \varrho(u)\vec{a}(v)$, $U_0 \leqslant u \leqslant U$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ — кусочно-регулярная поверхность вращения отрицательной кривизны, радиус-вектор $\vec{x}(u, v)$ которой отнесен к подвижному трехграннику $\left(0, \vec{k}, \vec{a}(v), \frac{d\vec{a}}{dv}\right)$ [1], $\varrho = \varrho(u)$ — уравнение ее меридиана.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *На кусочно-регулярной поверхности вращения F отрицательной кривизны для каждой параллели $u = u_0$ существует счетное всюду плотное множество таких параллелей $u = \bar{u}_i$, что полосы F_i, ограниченные параллелями $u = u_0$ и одной из $u = \bar{u}_i$, допускают нетривиальные бесконечно малые изгибания скольжения.*

Доказательство. Не ограничивая общности, в дальнейшем за $u = u_0$ примем $u = U_0$. Если поверхность F принадлежит классу C^2, то, как известно [2], в этом случае задача сводится к исследованию дифференциального уравнения

$$\varrho(u)\,\frac{d^2\psi_n}{du^2} + (n^2 - 1)\,\varrho''(u)\,\psi_n = 0 \tag{1}$$

при следующих граничных условиях

$$\frac{\psi_n'(U_0)}{\psi_n(U_0)} = -\frac{(n^2-1)\,\varrho'(U_0)}{\varrho(U_0)}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\psi_n'(\bar{u}_i)}{\psi_n(\bar{u}_i)} = -\frac{(n^2-1)\,\varrho'(\bar{u}_i)}{\varrho(\bar{u}_i)}, \tag{2.2}$$

где $\varrho = \varrho(u)$ — уравнение меридиана, $\psi_n(u)$ — коэффициент Фурье одной из координат вектора $\vec{z}(u, v)$ [2], $n = 2, 3, \ldots$.

Пусть $u = u^{(j)}$:

$$U_0 < u^{(1)} < u^{(2)} < \ldots < u^{(k-1)} < U$$

— последовательность всех точек излома меридиана $\varrho = \varrho(u)$ кусочно-регулярной поверхности F. Функцию $\varrho = \varrho(u)$ представим в следующем виде:

$$\varrho(u) = \begin{cases} \varrho_1(u), & \text{если} \quad U_0 \leqslant u \leqslant u^{(1)}, \\ \varrho_2(u), & \text{если} \quad u^{(1)} \leqslant u \leqslant u^{(2)}, \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \varrho_k(u), & \text{если} \quad u^{(k-1)} \leqslant u \leqslant U, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varrho_j(u) > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ — регулярные класса C^2 функции на промежутках $[u^{(j-1)}, u^{(j)}]$, причем $\varrho_j''(u) > 0$, $u^{(0)} = U_0$, $u^{(k)} = U$. Поверхность, получаемую от вращения дуги кривой $\varrho = \varrho_j(u)$, будем обозначать через $F^{(j)}$. Таким образом, поверхность F можем рассматривать как поверхность, склеенную из регулярных поверхностей вращения $F^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Обозначим изгибающие поля каждой из регулярных частей $F^{(j)}$ поверхности F через $\vec{z}_1(u, v)$ соответственно. Так как каждая из параллелей склеивания $u = u^{(j)}$ участвует одновременно в деформациях двух смежных регулярных частей поверхности F, именно $F^{(j)}$ и $F^{(j+1)}$, то она будет, очевидно, оказывать определенное влияние на характер этих изгибаний, поскольку деформация кривой $u = u^{(j)}$ при бесконечно малом изгибании поверхности $F^{(j)}$ должна быть идентична деформации ее при бесконечно малом изгибании поверхности $F^{(j+1)}$. Это обстоятельство в силу непрерывности деформации вдоль $u = u^{(j)}$ приводит к дополнительным соотношениям между величинами, характеризующими бесконечно малые изгибания смежных регулярных частей $F^{(j)}$, $F^{(j+1)}$ поверхности F, которые относительно интересующей нас функции $\psi_n(u)$ принимают вид

$$\begin{gathered}\psi_{j+1,n}(u^{(j)}) = \psi_{j,n}(u^{(j)}),\\ \varrho_{j+1}(u^{(j)})\,\psi'_{j+1,n}(u^{(j)}) + (n^2-1)\,\varrho'_{j+1}(u^{(j)})\,\psi_{j+1,n}(u^{(j)}) =\\ = \varrho_j(u^{(j)})\,\psi'_{j,n}(u^{(j)}) + (n^2-1)\,\varrho'_j(u^{(j)})\,\psi_{j,n}(u^{(j)}).\end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом, для доказательства теоремы, очевидно, достаточно показать, что для каждого значения $u = u_0$ существует счетное всюду плотное на сегменте $[U_0, U]$ множество значений $u = \overline{u}_i$ таких, что дифференциальное уравнение (1), для которого $\varrho = \varrho(u)$ определяется равенствами (3), при целых $n \geqslant 2$ имеет нетривиальные решения, которые на промежутках $[u^{(j-1)}, u^{(j)}]$ принадлежат классу C^2, а на всем промежутке — классу C и удовлетворяют условиям (2), а в точках излома $u = u^{(j)}$ — дополнительным условиям (4). Сначала докажем, что на последнем промежутке регулярности функции $\varrho = \varrho(u)$, именно, $[u^{(k-1)}, U]$, существует счетное всюду плотное в нем множество $\{\overline{u}_i\}$ такое, что дифференциальное уравнение (1) будет иметь нетривиальные ограниченные решения, удовлетворяющие условиям (2.1), (2.2), (4). Очевидно, уравнение (1) имеет нетривиальное ограниченное на $[U_0, u^{(1)}]$ решение, которое удовлетворяет условию (2.1) при любом целом $n \geqslant 2$. Действительно, за такое решение можно взять то решение уравнения (1), которое удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\psi_{1,n}(U_0) = \varrho_1(U_0),\\ \psi'_{1,n}(U_0) = -(n^2-1)\,\varrho'_1(U_0).\end{gathered} \tag{5}$$

Это решение на правом конце промежутка $[U_0, u^{(1)}]$ будет принимать вместе со своей производной вполне определенные значения: $\psi_{1,n} = \psi_{1,n}(u^{(1)})$, $\psi'_{1,n} = \psi'_{1,n}(u^{(1)})$, причем хотя бы одно из этих значений отлично от нуля, ибо в противном случае $\psi_{1,n}(u) \equiv 0$, что невозможно в силу (5).

На промежутке $[u^{(1)}, u^{(2)}]$ возьмем то решение дифференциального уравнения (1), которое удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\psi_{2,n}(u^{(1)}) = \psi_{1,n}(u^{(1)}),\\ \psi'_{2,n}(u^{(1)}) = \frac{\varrho_1(u^{(1)})\,\psi'_{1,n}(u^{(1)}) + (n^2-1)\,\psi_{1,n}(u^{(1)})\,[\varrho'_1(u^{(1)}) - \varrho'_2(u^{(1)})]}{\varrho_2(u^{(1)})},\end{gathered} \tag{6}$$

а, следовательно, и условиям (4), когда $j = 1$. В силу теоремы Коши и условий (5) это решение будет нетривиальным ограниченным класса C^2, так как на промежутке $[u^{(1)}, u^{(2)}]$ $\varrho = \varrho_2(u)$ принадлежит классу C^2. Поступая аналогично на следующих промежутках регулярности функции $\varrho(u)$, мы приходим, наконец, к промежутку $[u^{(k-1)}, U]$. Пусть $\psi_{k,n}(u)$ — решение уравнения (1) на промежутке $[u^{(k-1)}, U]$, которое удовлетворяет условиям

$$\psi_{k,n}(u^{(k-1)}) = \psi_{k-1,n}(u^{(k-1)}),$$

$$\psi'_{k,n}(u^{(k-1)}) =$$

$$= \frac{\varrho_{k-1}(u^{(k-1)})\,\psi'_{k-1,n}(u^{(k-1)}) + (n^2-1)\psi_{k-1,n}(u^{(k-1)})[\varrho'_{k-1}(u^{(k-1)}) - \varrho'_k(u^{(k-1)})]}{\varrho_k(u^{(k-1)})}. \quad (7)$$

Повторяя для промежутка $[u^{(k-1)}, U]$ рассуждения теоремы 1 [2], убеждаемся, что можно так распорядиться целочисленными значениями $n \geqslant 2$, что дифференциальное уравнение (1) будет иметь на $[u^{(k-1)}, U]$ нетривиальное ограниченное решение, удовлетворяющее условиям (7), (2.2). Причем множество $\{\overline{u}_i\}$ счетное всюду плотное на сегменте $[u^{(k-1)}, U]$. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) на промежутке $[U_0, U]$ имеет нетривиальное ограниченное решение $\psi_n(u) = (\psi_{1,n}(u) + \psi_{2,n}(u) + \ldots + \psi_{k,n}(u))$, которое удовлетворяет условию (2.1), в точках излома — условиям (4), на сегменте $[u^{(k-1)}, U]$ — условию (2.2). Аналогично поступаем и с соседним промежутком $[u^{(k-2)}, u^{(k-1)}]$ и т. д.

Теорема доказана полностью.

Пусть $\varrho(u) = \varphi(u) + h$, $U_0 \leqslant u \leqslant U$, $h > 0$ — однопараметрическое множество кусочно-регулярных меридианов, где h — кратчайшее расстояние меридиана $\varrho = \varrho(u)$ от оси вращения, $\varphi(u)$ на промежутке регулярности $[u^{(j-1)}, u^{(j)}]$ удовлетворяет условиям $\varphi(u) \geqslant 0$, $\varphi''(u) > 0$.

Т е о р е м а 2. *Среди множества кусочно-регулярных меридианов $\varrho(u) = \varphi(u) + h$, $U_0 \leqslant u \leqslant U$ существует счетное всюду плотное множество таких, которые отстоят от оси вращения на расстоянии $h = \overline{h}_i$ и обладают тем свойством, что поверхность вращения отрицательной кривизны с меридианом $\varrho(u) = \varphi(u) + \overline{h}_i$ допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания «скольжения».*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если рассматриваемая поверхность принадлежит классу C^2, то, как известно [2], задача сводится к исследованию дифференциального уравнения

$$[\varphi(u) + h]\frac{d^2\psi_n}{du^2} + (n^2-1)\varphi''(u)\,\psi_n = 0 \quad (9)$$

при следующих граничных условиях

$$\frac{\psi'_n(U_0)}{\psi_n(U_0)} = -\frac{(n^2-1)\varphi'(U_0)}{\varphi(U_0)+h}, \quad (10.1)$$

$$\frac{\psi'_n(U)}{\psi_n(U)} = -\frac{(n^2-1)\varphi'(U)}{\varphi(U)+h}. \quad (10.2)$$

В нашем случае $\varrho(u) = \varphi(u) + h$ является кусочно-регулярной функцией на сегменте $[U_0, U]$. Поэтому ее можно представить в следующем виде:

$$\varrho(u) = \begin{cases} \varrho_1(u) = \varphi_1(u) + h^{(1)}, & \text{если} \quad U_0 \leqslant u \leqslant u^{(1)}, \\ \varrho_2(u) = \varphi_2(u) + h^{(2)}, & \text{если} \quad u^{(1)} \leqslant u \leqslant u^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \varrho_k(u) = \varphi_k(u) + h^{(k)}, & \text{если} \quad u^{(k-1)} \leqslant u \leqslant U, \end{cases}$$

где $h^{(j)}$ — кратчайшее расстояние частей $\varrho_j = \varrho_j(u)$ меридиана $\varrho = \varrho(u)$ от оси вращения, $\varphi_j(u)$ на сегменте $[u^{(j-1)}, u^{(j)}]$ принадлежит классу C^2, причем $\varphi_j(u) \geqslant 0$, $\varphi''_j(u) > 0$. Обозначим наименьшее из $h^{(j)}$ через h. В силу непрерывности функции $\varrho = \varrho(u)$ на сегменте $[U_0, U]$ в точках излома

$u = u^{(j)}$ должны выполняться условия

$$\begin{aligned} &\varphi_1(u^{(1)}) + h^{(1)} = \varphi_2(u^{(1)}) + h^{(2)}, \\ &\varphi_2(u^{(2)}) + h^{(2)} = \varphi_3(u^{(2)}) + h^{3}, \\ &\dots \quad \dots\dots\dots \\ &\varphi_{k-1}(u^{(k-1)}) + h^{(k-1)} = \varphi_k(u^{(k-1)}) + h^{(k)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку h совпадает с наименьшим из $h^{(j)}$, а они, в свою очередь, связаны равенствами (11), то $h^{(j)}$ можно представить в виде $h^{(j)} = h + c$, где $c = \text{const} > 0$ выражается через $\varphi_j(u^{(j)}), \varphi_{j+1}(u^{(j)})$.

На промежутке $[U_0, u^{(1)}]$ $\varrho = \varrho_1(u)$ принадлежит классу C^2. Пусть $\psi_{1,n}(u) = \psi_{1,n}(u, n, h)$ — нетривиальное ограниченное на этом промежутке решение уравнения (9), которое удовлетворяет условию (10.1), где n и h — произвольные пока параметры. На промежутке $[u^{(1)}, u^{(2)}]$ выберем то нетривиальное ограниченное решение уравнения (9), которое в точке излома $u = u^{(1)}$ удовлетворяет условию (6) и т. д. Наконец, на промежутке $[u^{(k-1)}, U]$ выберем нетривиальное ограниченное решение уравнения (9), которое удовлетворяет условию (4) при $j = k$.

Таким образом, мы можем построить при произвольных пока n и h нетривиальное ограниченное решение $\psi_n(u) = (\psi_{1,n}(u) + \psi_{2,n}(u) + \dots + \psi_{k,n}(u))$ регулярное на промежутках $[u^{(j-1)}, u^{(j)}]$, непрерывное на всем промежутке $[U_0, U]$ и удовлетворяющее условию (10.1), а в точках излома — условиям (4). Но построенное таким образом решение, вообще говоря, может не удовлетворять краевому условию (10.2) при произвольно фиксированных значениях параметров n и h. Однако можно так распорядиться целочисленными значениями параметра $n \geqslant 2$ и непрерывно меняющимся параметром $h > 0$, что полученное решение будет удовлетворять и условию (10.2). Для этого достаточно на промежутке $[u^{(k-1)}, U]$ повторить рассуждения теоремы 2 [2]. Причем множество $\{h_i\}$ будет счетным всюду плотным на интервале $(0, \infty)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Кон-Фоссен, Нежесткие замкнутые поверхности, УМН, т. IX, в. 1, 1954.
2. В. И. Михайловский, Бесконечно малые изгибания «скольжения» поверхностей вращения отрицательной кривизны, УМЖ, т. XIV, № 1, 1962.
3. В. І. Михайловський, Нескінченно малі згинання поверхонь обертання від'ємної кривизни при конічних втулочних в'язях, ДАН УРСР, № 8, 1962.
4. В. І. Михайловський, Нескінченно малі згинання заклеєних поверхонь обертання від'ємної кривизни, Вісник КДУ, № 4, серія астр., матем. та мех., в. 2, 1961.
5. В. І. Михайловський, Нескінченно малі згинання деяких невипуклих кусково регулярних замкнених поверхонь невід'ємної кривизни, Вісник КДУ, № 4, серія астр., матем. та мех., в. 1, 1961.

Поступила 14. XII 1961 г.
Киев