О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и с малым параметром

В. И. Фодчук

1. Как известно, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом интегрируются в замкнутой форме лишь в совершенно исключительных случаях. Поэтому основными методами для количественного анализа систем, описываемых такими уравнениями, являются методы приближенного интегрирования этих уравнений.

С этой целью для исследования квазилинейных колебательных систем весьма эффективно применяются асимптотические методы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. При этом запаздывания и параметры системы считаются постоянными *.

Но в реальных колебательных системах такие допущения не всегда возможны. Запаздывания и параметры системы зачастую сами являются функциями времени, что еще больше усложняет характер явлений, происходящих в таких системах.

В настоящей заметке рассматриваются нелинейные колебательные системы с запаздыванием, параметры и запаздывания которых медленно изменяются во времени (медленно по отношению к периоду колебаний). С помощью метода Крылова — Боголюбова [1] строятся асимптотические разложения для решений уравнений, описывающих эти системы, близких к периодическим решениям вырожденного уравнения. Наличие последних предполагается.

Подобные системы без запаздывания изучались Ю. А. Митропольским [2]. Случай постоянных коэффициентов и постоянных запаздываний рассмотрен В. П. Рубаником [3].

При помощи построенных приближенных решений можно исследовать нестационарные колебательные процессы, происходящие в рассматриваемых системах.

2. Пусть колебания системы описываются следующим дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x}(t) + p_1(\tau)\dot{x}(t) + q_1(\tau)\dot{x}[t - \nu_1(\tau)] + p_2(\tau)x(t) + q_2(\tau)x[t - \nu_2(\tau)] =$$
$$= \varepsilon f\{\tau, x(t), x[t - \nu_2(\tau)], \dot{x}(t), \dot{x}[t - \nu_1(\tau)]\}, \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon t$, ε — малый положительный параметр, $\nu_1(\tau)$, $\nu_2(\tau)$ неотрицательные и принимают только значения, лежащие в некоторой малой окрестности точек $\nu_1(\tau_0)$, $\nu_2(\tau_0)$ для всех $0 \leqslant \tau \leqq L$, $L > 0$, τ_0 — некоторое число из $[0, L]$, которое дальше будет определено. Функции $f, p_1, p_2, q_1, q_2, \nu_1, \nu_2$ —

---

* Кроме работы В. П. Рубаника [4], в которой предполагается медленное изменение параметров в слабо нелинейных членах.

неограничено дифференцируемы для всех конечных значений своих аргументов.

Предположим, что при некотором $\tau_0 \in [0, L]$ порождающее уравнение

$$\ddot{x}(t) + p_1(\tau_0)\dot{x}(t) + q_1(\tau_0)\dot{x}[t - \nu_1(\tau_0)] + p_2(\tau_0)x(t) + q_2(\tau_0)x[t - \nu_2(\tau_0)] = 0 \tag{2}$$

допускает семейство периодических решений

$$x(t) = a\cos[\omega(\tau_0)t + \varphi], \tag{3}$$

где a и φ — произвольные постоянные, а $\omega(\tau_0)$ — простой корень системы трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} l_{1,1}(\tau_0, \omega) &\equiv -\omega^2 + q_1(\tau_0)\omega\sin[\omega\nu_1(\tau_0)] + q_2(\tau_0)\cos[\omega\nu_2(\tau_0)] = 0, \\ l_{2,1}(\tau_0, \omega) &\equiv -p_1(\tau_0)\omega - q_1(\tau_0)\omega\cos[\omega\nu_1(\tau_0)] + q_2(\tau_0)\sin[\omega\nu_2(\tau_0)] = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

причем уравнения (4) не имеют корней, кратных $\omega(\tau_0)$, и корней вида $n\omega(\tau_0)$ $(n = 0, 2, 3, \dots)$.

Решение уравнения (1), близкое к решению (3) порождающего уравнения, ищем в виде разложений по степеням ε

$$x(t) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, \psi) + \dots, \tag{5}$$

в котором $u_1(\tau, a, \psi)$, $u_2(\tau, a, \psi), \dots$ являются периодическими функциями ψ с периодом 2π, $\tau = \varepsilon t$, а величины a и ψ как функции времени определяются следующей системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a) + \dots. \end{aligned} \tag{6}$$

Для нахождения явных выражений для функций A_1, B_1, u_1, A_2, B_2, $u_2, \dots$ дифференцируем правую часть выражения (5) с учетом (6) и подставляем в уравнение (1). Раскладывая затем правую часть полученного равенства в ряд Тэйлора по ε и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем уравнения

$$\begin{aligned} -\omega^2(\tau)a\cos\psi - p_1(\tau)\omega(\tau)a\sin\psi - q_1(\tau)\omega(\tau)a\sin[\psi - \omega(\tau)\nu_1(\tau)] + \\ + p_2(\tau)a\cos\psi + q_2(\tau)a\cos[\psi - \omega(\tau)\nu_2(\tau)] = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\omega^2(\tau)\frac{\partial^2 u_1(\tau, a, \psi)}{\partial\psi^2} + p_1(\tau)\omega(\tau)\frac{\partial u_1(\tau, a, \psi)}{\partial\psi} +$$

$$+ q_1(\tau)\omega(\tau)\frac{\partial u_1[\tau, a, \psi - \omega(\tau)\nu_1(\tau)]}{\partial\psi} + p_2(\tau)u_1(\tau, a, \psi) +$$

$$+ q_2(\tau)u_1[\tau, a, \psi - \omega(\tau)\nu_2(\tau)] = f_0(\tau, a, \psi) - \Big\{2A_1(\tau, a)\omega(\tau)\sin\psi -$$

$$- 2B_1(\tau, a)\omega(\tau)a\cos\psi - a\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\sin\psi + A_1(\tau, a)p_1(\tau)\cos\psi -$$

$$- B_1(\tau, a)p_1(\tau)a\sin\psi + A_1(\tau, a)q_1(\tau)\cos[\psi - \omega(\tau)\nu_1(\tau)] -$$

$$- B_1(\tau, a)q_1(\tau)a\sin[\psi - \omega(\tau)\nu_1(\tau)] + q_1(\tau)\frac{d[\omega(\tau)\nu_1(\tau)]}{d\tau}\sin[\psi - \omega(\tau)\nu_1(\tau)] +$$

$$+ B_1(\tau, a)q_1(\tau)\omega(\tau)\nu_1(\tau)a\cos[\psi - \omega(\tau)\nu_1(\tau)] + A_1(\tau, a)q_1(\tau)\omega(\tau)\nu_1(\tau)\sin[\psi -$$

$$- \omega(\tau)\nu_1(\tau)] + B_1(\tau, a) q_2(\tau)\nu_2(\tau) a \sin[\psi - \omega(\tau)\nu_2(\tau)] -$$

$$\left. - A_1(\tau, a) q_2(\tau)\nu_2(\tau)\cos[\psi - \omega(\tau)\nu_2(\tau)] \right\}, \tag{8}$$

. . . .

где $f_0(\tau, a, \psi) = f\{\tau, a\cos\psi, -a\omega(\tau)\sin\psi,\ a\cos[\psi - \omega(\tau)\nu_2(\tau)],\ - a\omega(\tau)\sin[\psi - \omega(\tau)\nu_1(\tau)]\}$ — периодическая функция ψ с периодом 2π.

Разложим функцию $f_0(\tau, a, \psi)$ в ряд Фурье

$$f_0(\tau, a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\{g_n(\tau, a)\cos n\psi + h_n(\tau, a)\sin n\psi\},$$

где

$$g_n(\tau, a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\cos n\psi d\psi,$$

$$h_n(\tau, a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, a, \psi)\sin n\psi d\psi.$$

Так как функции $u_1(\tau, a, \psi)$, $u_2(\tau, a, \psi), \ldots$ периодичны по ψ (по предположению), то их можно представить тоже в виде рядов Фурье. Запишем разложение в ряд Фурье функции $u_1(\tau, a, \psi)$

$$u_1(\tau, a, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\{v_n(\tau, a)\cos n\psi + w_n(\tau, a)\sin n\psi\}. \tag{9}$$

Для однозначности определения искомых функций из уравнений (7), (8), ... наложим дополнительные условия на функции $u_1(\tau, a, \psi)$, $u_2(\tau, a, \psi)$, ..., именно потребуем отсутствия в них первой гармоники аргумента ψ, для чего в уравнении (8) и последующих уравнениях приравняем нулю коэффициенты при $\cos\psi$ и $\sin\psi$. Получим равенства

$$g_1(\tau, a) + 2B_1(\tau, a)\omega(\tau) a - A_1(\tau, a) p_1(\tau) - A_1(\tau, a) q_1(\tau)\cos[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] -$$

$$- B_1(\tau, a) q_1(\tau) a \sin[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] + q_1(\tau)\frac{d[\omega(\tau)\nu_1(\tau)]}{d\tau} a\sin[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] -$$

$$- B_1(\tau, a) q_1(\tau)\omega(\tau)\nu_1(\tau) a\cos[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] + A_1(\tau, a) q_1(\tau)\omega(\tau)\nu_1(\tau)\sin[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] +$$

$$+ B_1(\tau, a) q_2(\tau)\nu_2(\tau) a\sin[\omega(\tau)\nu_2(\tau)] + A_1(\tau, a) q_2(\tau)\nu_2(\tau)\cos[\omega(\tau)\nu_2(\tau)] = 0,$$

$$h_1(\tau, a) + 2A_1(\tau, a)\omega(\tau) + \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} a + B_1(\tau, a) p_1(\tau) a - \tag{10}$$

$$- A_1(\tau, a) q_1(\tau)\sin[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] + B_1(\tau, a) q_1(\tau) a\cos[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] -$$

$$- q_1(\tau)\frac{d[\omega(\tau)\nu_1(\tau)]}{d\tau} a\cos[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] - B_1(\tau, a) q_1(\tau)\omega(\tau)\nu_1(\tau) a\sin[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] -$$

$$- A_1(\tau, a) q_1(\tau)\omega(\tau)\nu_1(\tau)\cos[\omega(\tau)\nu_1(\tau)] - B_1(\tau, a) q_2(\tau)\nu_2(\tau) a\cos[\omega(\tau)\nu_2(\tau)] +$$

$$+ A_1(\tau, a) q_2(\tau)\nu_2(\tau)\sin[\omega(\tau)\nu_2(\tau)] = 0,$$

. . . .

Решая систему (10) относительно $A_1(\tau, a)$ и $B_1(\tau, a)$, находим

$$A_1(\tau, a) = \frac{\gamma_2(\tau, a)\dfrac{\partial l_{1,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega} - \gamma_1(\tau, a)\dfrac{\partial l_{2,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega}}{\left(\dfrac{\partial l_{1,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial l_{2,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega}\right)^2}, \tag{II}$$

$$B_1(\tau, a) = \frac{1}{a}\frac{\gamma_1(\tau, a)\dfrac{\partial l_{1,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega} + \gamma_2(\tau, a)\dfrac{\partial l_{2,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega}}{\left(\dfrac{\partial l_{1,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial l_{2,1}(\tau, \omega)}{\partial\omega}\right)^2}, \tag{12}$$

где введены обозначения

$$\gamma_1(\tau, a) = g_1(\tau, a) + q_1(\tau)\frac{d[\omega(\tau)\nu_1(\tau)]}{d\tau}a\sin[\omega(\tau)\nu_1(\tau)],$$

$$\gamma_2(\tau, a) = h_1(\tau, a) + \frac{d\omega(\tau)}{d\tau}a - q_1(\tau)\frac{d[\omega(\tau)\nu_1(\tau)]}{d\tau}a\cos[\omega(\tau)\nu_1(\tau)],$$

а $l_{1,1}(\tau, \omega)$ и $l_{2,1}(\tau, \omega)$ определяются по формулам (4), в которые вместо τ_0 и ω нужно положить τ и $\omega(\tau)$.

Уравнение (8) с учетом (9) и (10) запишется следующим образом

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\Big[-n^2\omega^2(\tau)v_n(\tau, a) + np_1(\tau)\omega(\tau)w_n(\tau, a) + nq_1(\tau)\omega(\tau)\sin[n\omega(\tau)\nu_1(\tau)]v_n(\tau, a) +$$
$$+ nq_1(\tau)\omega(\tau)\cos[n\omega(\tau)\nu_1(\tau)]w_n(\tau, a) + p_2(\tau)v_n(\tau, a) +$$
$$+ q_2(\tau)\cos[n\omega(\tau)\nu_2(\tau)]v_n(\tau, a) - q_2(\tau)\sin[n\omega(\tau)\nu_2(\tau)]w_n(\tau, a)\Big]\cos n\psi +$$
$$+ \Big[-n^2\omega^2(\tau)w_n(\tau, a) - np_1(\tau)\omega(\tau)v_n(\tau, a) - nq_1(\tau)\omega(\tau)\cos[n\omega(\tau)\nu_1(\tau)]v_n(\tau, a) +$$
$$+ nq_1(\tau)\omega(\tau)\sin[n\omega(\tau)\nu_1(\tau)]w_n(\tau, a) + p_2(\tau)w_n(\tau, a) +$$
$$+ q_2(\tau)\sin[n\omega(\tau)\nu_2(\tau)]v_n(\tau, a) + q_2(\tau)\cos[n\omega(\tau)\nu_2(\tau)]w_n(\tau, a)\Big]\sin n\psi\Big\} =$$
$$= \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{n}\{g_n(\tau, a)\cos n\psi + h_n(\tau, a)\sin n\psi\}. \tag{13}$$

Приравнивая в (13) коэффициенты при одинаковых гармониках аргумента ψ, получим систему уравнений для определения $v_n(\tau, a)$ и $w_n(\tau, a)$, решая которую находим

$$v_1(\tau, a) = 0, \; w_1(\tau, a) = 0,$$
$$v_n(\tau, a) = \frac{g_n(\tau, a)\, l_{1,n}(\tau) + h_n(\tau, a)\, l_{2,n}(\tau)}{l_{1,n}^2(\tau) + l_{2,n}^2(\tau)},$$
$$w_n(\tau, a) = \frac{h_n(\tau, a)\, l_{1,n}(\tau) - g_n(\tau, a)\, l_{2,n}(\tau)}{l_{1,n}^2(\tau) + l_{2,n}^2(\tau)},$$

$$l_{1,n}(\tau) = -n^2\omega^2(\tau) + nq_1(\tau)\omega(\tau)\sin[n\omega(\tau)\nu_1(\tau)] + p_2(\tau) + q_2(\tau)\cos[n\omega(\tau)\nu_2(\tau)],$$
$$l_{2,n}(\tau) = -np_1(\tau)\omega(\tau) - nq_1(\tau)\omega(\tau)\cos[n\omega(\tau)\nu_1(\tau)] + q_2(\tau)\sin[n\omega(\tau)\nu_2(\tau)],$$

причем функции $l_{1,n}(\tau)$ и $l_{2,n}(\tau)$ не обращаются в нуль одновременно в точке $\tau = \tau_0$ и в некоторой ее окрестности в силу их непрерывности и в силу отсутствия в уравнениях (4) корней вида $n\omega(\tau_0)$ $(n = 0, 2, 3, \ldots)$.

Следовательно,

$$u_1(\tau, a, \psi) = \sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty} \left\{ \frac{g_n(\tau, a)\, l_{1,n}(\tau) + h_n(\tau, a)\, l_{2,n}(\tau)}{l_{1,n}^2(\tau) + l_{2,n}^2(\tau)} \cos n\psi + \right.$$

$$\left. + \frac{h_n(\tau, a)\, l_{1,n}(\tau) - g_n(\tau, a)\, l_{2,n}(\tau)}{l_{1,n}^2(\tau) + l_{2,n}^2(\tau)} \sin n\psi \right\}. \tag{14}$$

Аналогичным образом можно определить величины $A_2(\tau, a)$, $B_2(\tau, a)$, $u_2(\tau, a, \psi)$ и т.д.

Решение уравнения (1) в первом приближении будет иметь вид

$$x = a \cos \psi,$$

где a и ψ должны быть определены из уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a), \tag{15}$$

в которых $A_1(\tau, a)$ и $B_1(\tau, a)$ имеют вид (11) и (12). Улучшенное первое приближение берется в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(\tau, a, \psi),$$

где $u_1(\tau, a, \psi)$ определяется из (14), а a и ψ — из (15).

3. Пример. Дифференциальное уравнение автогенератора с запаздыванием, параметры которого медленно изменяются во времени, может быть приведено к виду

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(\tau)\, x(t) = \varepsilon \{2r(\tau)\dot{x}(t) + \delta(\tau)\, x^2[t - \nu(\tau)]\dot{x}[t - \nu(\tau)]\}, \tag{16}$$

где $\omega(\tau)$, $r(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\nu(\tau)$ — достаточное число раз дифференцируемые функции времени. Решение уравнения (16) в первом приближении имеет вид

$$x = a \cos \psi,$$

где a и ψ определяются уравнениями

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left\{ 2r(\tau) - \frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{4}\, \delta(\tau)\, a^2 \cos[\omega(\tau)\, \nu(\tau)] \right\}, \tag{17}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{8}\, \delta(\tau)\, a^2 \sin[\omega(\tau)\, \nu(\tau)]. \tag{18}$$

Интегрируя уравнение (17) при начальном условии

$$a|_{t=t_0} = a_0,$$

где a_0 — некоторое стационарное значение амплитуды колебаний, находим

$$a(t) = \left[e^{-F} \left(\frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{4} \int_{t_0}^{t} \delta(\tau) \cos[\omega(\tau)\, \nu(\tau)]\, e^{F} d\tau \right) \right]^{1/2}, \tag{19}$$

где

$$F = \int_{t_0}^{t} \left(2r(\tau) - \frac{1}{\omega(\tau)} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} \right) d\tau.$$

Фазу $\psi(t)$ находим из уравнения (18), подставив раньше в его правую часть вместо a выражение (19). Получаем

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \omega_1(\tau)\, dt, \tag{20}$$

где

$$\omega_1(\tau) = \omega(\tau) - \frac{1}{8}\, \varepsilon\delta(\tau)\, a^2(t) \sin[\omega(\tau)\,\nu(\tau)].$$

Функция $u_1(\tau, a, \psi)$, входящая в улучшенное первое приближение, имеет в данном примере вид

$$u_1(\tau, a, \psi) = -\frac{\delta(\tau) a^3}{32\omega(\tau)} \{\sin[3\omega(\tau)\,\nu(\tau)] \cos 3\psi - \cos[3\omega(\tau)\,\nu(\tau)] \sin 3\psi\},$$

где a и ψ определяются по формулам (19) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

2. Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд-во. АН УССР, 1955.

3. В. П. Рубаник, Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциальноразностным уравнениям, Укр. матем. ж., т. XI, № 4, 1959.

4. В. П. Рубаник, Многочастотные резонансные колебания в квазилинейных системах с запаздывающим аргументом, Радиотехника, т. IV, № 4, 1961.

Поступила 14. VI 1962 г.

Киев