О бесконечно малых изгибаниях скольжения сферических сегментов относительно произвольной плоскости

Н. И. Черней

Бесконечно малое изгибание поверхности положительной кривизны F с краем γ в плоскости ω называется изгибанием скольжения, если вектор изгибающего поля $\bar{\tau}$ вдоль γ лежит в плоскости ω и, следовательно, удовлетворяет условию

$$\bar{\tau}\cdot\bar{\nu}\,\big|_{\gamma}=0, \tag{1}$$

где $\bar{\nu}$ — вектор, перпендикулярный ω.

Мы обобщаем понятие изгибания скольжения поверхности F с краем γ, взяв в качестве вектора $\bar{\nu}$ произвольный постоянный вектор. Плоскость ω, перпендикулярную этому вектору, назовем плоскостью скольжения.

Поверхность F называется *жесткой* относительно плоскости скольжения ω, если каждое изгибающее поле скольжения $\bar{\tau}$ тривиально, то есть представляет собой поле скоростей движения поверхности как твердого тела. В противном случае поверхность F называется *нежесткой*.

Рассмотрим так обобщенные изгибания скольжения для сегментов сферы единичного радиуса. Ориентируем сферический сегмент относительно прямоугольной системы координат x, y, z таким образом, чтобы его центр совпадал с началом координат, а полюс находился на отрицательной полуоси z. На поверхности сегмента введем координатную сеть u, v : $u=\text{const}$ — параллели, $v=\text{const}$ — меридианы. Обозначим [2]: $\bar{e}$ — единичный вектор оси z, $\bar{a}(v)$ — единичный перпендикулярный к $\bar{e}$ вектор, который описывает окружность с дугой v, и

$$\bar{a}'(v) = \frac{d\bar{a}(v)}{dv} = [\bar{e} \times \bar{a}(v)].$$

При надлежащем выборе параметров u и v сферический сегмент задаётся уравнением

$$\bar{r}(u, v) = \bar{e} \cdot \operatorname{th} u + \bar{a}(v) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} u},$$

$$-\infty \leqslant u \leqslant K < \infty, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi.$$

Разложим вектор $\tau(u, v)$ по векторам $\bar{a}(v)$, $\bar{a}'(v)$, $\bar{e}$*:

$$\bar{\tau}(u, v) = \bar{a}(v) \cdot \xi(u, v) + \bar{a}'(v) \cdot \eta(u, v) + \bar{e} \cdot \zeta(u, v).$$

Как известно, вектор изгибающего поля удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \bar{r}_u \bar{\tau}_u &= 0, \\ \bar{r}_u \bar{\tau}_v + \bar{r}_v \bar{\tau}_u &= 0, \\ \bar{r}_v \bar{\tau}_v &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В нашем случае

$$\bar{r}_u = \bar{e} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} - \bar{a}(v) \cdot \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}, \qquad \bar{r}_v = \bar{a}'(v) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} u},$$

$$\bar{\tau}_u = \bar{a}(v) \cdot \xi_u + \bar{a}'(v) \cdot \eta_u + \bar{e} \cdot \zeta_u,$$

$$\bar{\tau}_v = (\xi_v - \eta) \cdot \bar{a}(v) + (\xi + \eta_v) \cdot \bar{a}'(v) + \zeta_v \cdot \bar{e},$$

и, следовательно, система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \zeta_u - \xi_u \cdot \operatorname{sh} u &= 0, \\ \zeta_v - (\xi_v - \eta) \cdot \operatorname{sh} u + \eta_u \cdot \operatorname{ch} u &= 0, \\ \xi + \eta_v &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\zeta(u, v)$ — периодические функции по v, то они допускают представление в виде рядов Фурье:

$$\xi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{n1}(u) \cos nv + A_{n2}(u) \sin nv],$$

$$\eta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} [B_{n1}(u) \cos nv + B_{n2}(u) \sin nv],$$

$$\zeta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{n1}(u) \cos nv + C_{n2}(u) \sin nv].$$

Определяя частные производные функций ξ, η, ζ и подставляя их в систему (3), получаем уравнение для нахождения неизвестных коэффициентов Фурье A_{n1}, A_{n2}, B_{n1}, B_{n2}, C_{n1}, C_{n2} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$C'_{n1}(u) - A'_{n1}(u) \cdot \operatorname{sh} u = 0,$$

* Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что поле $\bar{\tau}$ регулярно, по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемо.

$$C'_{n2}(u) - A'_{n2}(u)\cdot \operatorname{sh} u = 0; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} nC_{n2}(u) - [nA_{n2}(u) - B_{n1}(u)]\cdot \operatorname{sh} u + B'_{n1}(u)\cdot \operatorname{ch} u = 0,\\ -nC_{n1}(u) + [nA_{n1}(u) + B_{n2}(u)]\cdot \operatorname{sh} u + B'_{n2}(u)\cdot \operatorname{ch} u = 0; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} A_{n1}(u) + nB_{n2}(u) = 0,\\ A_{n2}(u) - nB_{n1}(u) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{6}$$

Исключая A_{n1}, A_{n2}, C_{n1} и C_{n2} из (4), (5), (6), получаем

$$B''_{n1}(u) + 2\operatorname{th} u\cdot B'_{n1}(u) - (n^2-1)B_{n1}(u) = 0, \tag{7'}$$

$$B''_{n2}(u) + 2\operatorname{th} u\cdot B'_{n2}(u) - (n^2-1)B_{n2}(u) = 0. \tag{7''}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$W''_n(u) + 2\operatorname{th} u\cdot W'_n(u) - (n^2-1)W_n(u) = 0. \tag{*}$$

С помощью замены $\psi_n(u) = W_n(u)\cdot \operatorname{ch} u$ это уравнение приводится к виду

$$\psi''_n(u) - n^2\psi_n(u) = 0.$$

Легко видеть, что единственное регулярное в интервале $-\infty \leqslant u \leqslant K < \infty$ решение уравнения (*) с точностью до множителя p_n, зависящего только от n, имеет вид

$$W_n(u) = \frac{e^{nu}}{\operatorname{ch} u}.$$

Так как B_{n1} и B_{n2} — регулярные решения уравнения (*) [см. (7′), 7″)], можно написать, что

$$B_{n1}(u) = \frac{p_{n1}e^{nu}}{\operatorname{ch} u}, \qquad B_{n2}(u) = \frac{p_{n2}e^{nu}}{\operatorname{ch} u}.$$

После подстановки значений B_{n1} и B_{n2} в системы (5), (6), находим

$$A_{n1}(u) = -\frac{np_{n2}e^{nu}}{\operatorname{ch} u}, \qquad A_{n2}(u) = \frac{np_{n1}e^{nu}}{\operatorname{ch} u},$$

$$C_{n1}(u) = -p_{n2}e^{nu}(n\operatorname{th} u - 1); \qquad C_{n2}(u) = p_{n1}e^{nu}(n\operatorname{th} u - 1).$$

Итак, общее решение системы (3) допускает представление

$$\begin{gathered} \xi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{nu}}{\operatorname{ch} u}(-p_{n2}\cdot \cos nv + p_{n1}\cdot \sin nv),\\ \eta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nu}}{\operatorname{ch} u}(p_{n1}\cdot \cos nv + p_{n2}\cdot \sin nv),\\ \zeta(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (n\operatorname{th} u - 1)e^{nu}(-p_{n2}\cos nv + p_{n1}\sin nv). \end{gathered} \tag{8}$$

Для того чтобы рассматриваемый сферический сегмент был нежестким, необходимо и достаточно, чтобы среди решений (8) было хотя бы одно нетривиальное решение, удовлетворяющее краевому условию (1).

Разложим вектор $\bar{v}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{a}'$, $\bar{e}$:

$$\bar{v} = \sin\alpha\cos v\cdot\bar{a}(v) - \sin\alpha\sin v\cdot\bar{a}'(v) + \bar{e}\cdot\cos\alpha,$$

α — угол между плоскостью края сегмента и плоскостью скольжения ω $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right.$, в случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ всегда имеем жесткость$\left.\right)$. Тогда краевое условие (1) примет вид

$$\sin\alpha\cos v\cdot\xi - \sin\alpha\cdot\sin v\cdot\eta + \cos\alpha\cdot\zeta = 0. \tag{9}$$

Подставив сюда ξ, η, ζ в форме (8), получаем

$$\sin\alpha\cos v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{ne^{nu}}{\operatorname{ch} u}(-p_{n2}\cos nv + p_{n1}\sin nv) -$$

$$-\sin\alpha\sin v\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nu}}{\operatorname{ch} u}(p_{n1}\cos nv + p_{n2}\sin nv) +$$

$$+\cos\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(n\operatorname{th} u - 1)e^{nu}(-p_{n2}\cos nv + p_{n1}\sin nv) = 0. \tag{10}$$

Здесь u соответствует краю сегмента.

Рассмотрим сначала случай $\alpha = 0$. Соотношение (10) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu}(n\operatorname{th} u - 1)(-p_{n2}\cos nv + p_{n1}\sin nv) = 0. \tag{10'}$$

Так как соотношение (10′) выполняется тождественно по v, то имеем

$$(n\operatorname{th} u - 1)p_{n2} = 0, \qquad (n\operatorname{th} u - 1)p_{n1} = 0. \tag{10''}$$

Исследуем теперь при каких значениях u получающийся сегмент будет нежестким. Как уже ранее отмечали, это соответствует тому, что хотя бы одно из уравнений (10″) имеет нетривиальное решение p_{n1}, p_{n2}. При исследовании уравнений (10″) могут представиться две возможности:

1) u таково, что при любом значении $n = 2, 3, \ldots$ $n\operatorname{th} u - 1 \neq 0$. В этом случае $p_{n1} = p_{n2} = 0$ для всех значений n и, значит, сферический сегмент, отвечающий этому значению u, жесткий.

2) u является корнем уравнения $n\operatorname{th} u - 1 = 0$, где n — некоторое натуральное число. В этом случае система (10″) удовлетворяется при p_{n1} и p_{n2} отличных от нуля и $p_{k1} = p_{k2} = 0$ $(k \neq n)$. Это означает, что этот сегмент нежесткий, и, следовательно, существует счетное число нежестких сферических сегментов, ограниченных параллелью $\operatorname{th} u = \frac{1}{n}$. Впервые этот результат был получен Э. Рембсом [1].

После внесения $\cos v$ и $\sin v$ под знак суммы и свертывания с $\cos nv$ и $\sin nv$ соотношение (10) принимает вид

$$2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ch} u\sum_{n=0}^{\infty}(n\operatorname{th} u - 1)e^{nu}(p_{n2}\cos nv - p_{n1}\sin nv) +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}e^{nu}(n-1)[p_{n2}\cos(n+1)v - p_{n1}\sin(n+1)v] +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu}(n+1)[p_{n2}\cos(n-1)v - p_{n1}\sin(n-1)v] = 0.$$

Преобразуем индексы суммирования во втором и третьем слагаемых:

$$2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ch} u \sum_{n=0}^{\infty} (n \operatorname{th} u - 1) e^{nu} (p_{n2}\cos nv - p_{n1}\sin nv) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} e^{(n-1)u}(n-2)[p_{n-1,2}\cos nv - p_{n-1,1}\sin nv] +$$

$$+\sum_{n=-1}^{\infty} e^{(n+1)u}(n+2)[p_{n+1,2}\cos nv - p_{n+1,1}\sin nv] = 0.$$

Так как это равенство выполняется тождественно по v, то получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ch} u \cdot p_{02} - e^{u}\cdot p_{12} = 0,\\ 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ch} u(\operatorname{th} u - 1) e^{u} p_{12} + 3e^{2u} p_{22} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{(n-1)u}(n-2)p_{n-1,2} + 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ch} u(n \operatorname{th} u - 1)e^{nu}p_{n2} + e^{(n+1)u}p_{n+1,2}(n+2) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{gathered} \tag{11}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$e^{(n-1)u}(n-2)p_{n-1,2} + 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ch} u(n \operatorname{th} u - 1)e^{nu}p_{n2} + e^{(n+1)u}(n+2)p_{n+1,2} = 0$$

$$(n = 2, 3, 4, \dots).$$

Ее можно записать в более компактной форме

$$(n-2)\lambda_{n-1} + (an - b)\lambda_n + (n+2)\lambda_{n+1} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \dots), \tag{12}$$

где

$$\lambda_n = e^{nu}p_{n2}, \qquad a = 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{sh} u, \qquad b = 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ch} u.$$

Введем теперь вспомогательную функцию

$$\sigma(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n e^{int}. \tag{13}$$

Так как коэффициенты Фурье регулярных функций ξ, η, ζ при $n \to \infty$ являются бесконечно малыми порядка $\frac{1}{n^k}$, где k — степень регулярности функций ξ, η, ζ, то ряд (13) равномерно сходится и допускает почленное дифференцирование

$$\sigma'(t) = i\sum_{n=2}^{\infty} n\lambda_n e^{int}.$$

Функция $\sigma(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, которое получается следующим образом: умножим (12) на e^{int}, просуммируем по n и воспользуемся представлением (13) для функции $\sigma(t)$. Получим

$$(a + 2\cos t)\sigma'(t) - \sigma(bi - 2\sin t) - 3\lambda_2 i e^{it} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma(t)=\left[\int\frac{3\lambda_2 ie^{it}}{a+2\cos t}e^{\int\frac{-bi+2\sin t}{a+2\cos t}dt}dt+C\right]e^{-\int\frac{-bi+2\sin t}{a+2\cos t}dt}. \tag{13'}$$

Функция $\sigma(t)$ регулярна, если $|a|>2$, т. е. когда

$$\begin{aligned}&\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{sh}u>1,\\&\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{sh}u<-1.\end{aligned} \tag{14}$$

Пусть угол раствора сферического сегмента равен 2β $(0<\beta<\pi)$. Имеет место следующее соотношение

$$\operatorname{sh}u=\operatorname{ctg}\beta. \tag{**}$$

Легко видеть, что первое из неравенств (14) дает соотношение

$$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

Второе из неравенств (14) справедливо при $u<0$, или $\beta>\frac{\pi}{2}$, и оно приводит к соотношению

$$\beta-\alpha>\frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Функция $\sigma(t)$ периодическая с периодом 2π:

$$\sigma(t)=\sigma(t+2\pi). \tag{13''}$$

Из (13') и (13'') следует

$$e^{ib\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{a+2\cos t}}=1,$$

отсюда имеем

$$\begin{gathered}\frac{4b}{\sqrt{a^2-4}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=2m\pi,\\ \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ch}u}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{sh}^2u-1}}=m\qquad(m=2,3,\ldots).\end{gathered} \tag{17}$$

Воспользовавшись соотношением (**), приведем формулу (17) к виду

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}=m. \tag{18}$$

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема. *Пусть сферический сегмент F задан углом раствора $2\beta(0<\beta<\pi)$, а плоскость скольжения ω образует с плоскостью края сегмента угол α $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$. Тогда для каждого фиксированного значения α, если только $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ или $\beta-\alpha>\frac{\pi}{2}$, существует счетное множество нежестких сферических сегментов, углы раствора которых определяются по формуле*

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}=m\qquad(m=2,3,\ldots).$$

Все остальные сегменты жесткие.

В заключение выражаю благодарность академику АН УССР А. В. Погорелову за постановку задачи и руководство этой работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Рембс, Math. Ann., 111, 587 (1935).
2. С. Э. Кон-Фоссен, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, Физматгиз, 1959, стр. 89.

Поступила 23. VIII 1961 г.
Харьков