Приближение непериодических функций многочленами на системе сегментов [1]

В. К. Дзядык

В настоящей статье устанавливается, что в случае приближения непериодических непрерывных функций, заданных на множестве, состоящем из конечного числа сегментов, сохраняется та же качественная картина, которая имеет место при приближении функций, заданных на одном сегменте. Точнее, имеет место следующая теорема[2].

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, заданная на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из конечного числа сегментов $[a_i, b_i]$:*

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i], \qquad [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = 0 \text{ при } i \neq j,$$

имеет на этом множестве r-ю (r — целое $\geqslant 0$) непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, то для этой функции при каждом $n = 1, 2 \ldots$ можно построить алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что при каждом $x \in \mathfrak{M}$ будет

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant A_1 \left(\frac{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^r \omega_2 \left(\frac{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}{n} + \frac{1}{n^2} \right), \tag{1}$$

где A_1 — постоянная, не зависящая от x и n, $\omega_2(h) = \omega_2(f^{(r)}; h)$ — модуль гладкости производной $f^{(r)}(x)$:

$$\omega_2(h) = \omega_2(f^{(r)}; h) = \sup_{|u| < h} \max_{x} |f^{(r)}(x+u) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-u)|,$$

$$x - u,\ x,\ x + u \in \mathfrak{M}$$

и a_i и b_i — концы сегмента $[a_i, b_i]$, в котором содержится точка x.

Для случая, когда множество $\mathfrak{M}$ состоит только из одного отрезка $[a, b]$, эта теорема была нами доказана в 1958 г. [4] и в следующем году другим методом Г. Фрейдом [8]. Для доказательства этой теоремы в общем случае нам потребуется ряд лемм.

---

[1] Как мне любезно сообщил Н. И. Ахиезер, вопрос, решаемый в этой статье, имеет прямое отношение к исследованию многочленов ортогональных на системе сегментов (см. [1], стр. 746).

[2] После того, как эта работа была оформлена, появилась статья Ю. А. Брудного [9], в которой приводится без доказательства частный случай теоремы 1, следующий из нашего результата, если в правой части неравенства (1) модуль гладкости ω_2 заменить на модуль непрерывности ω функции f (см. также примечание в конце работы).

Лемма 1. *Пусть $\omega_1(h)$ и $\omega_2(h)$ обозначают соответственно модуль непрерывности и модуль гладкости какой-нибудь непрерывной на $[-1, 1]$ функции. Тогда, если $\omega_2(h) \neq 0$ при $h \neq 0$, то при $h \leqslant 1$ имеют место неравенства*

$$\omega_1^2(h) \leqslant A_2\omega_2(h), \tag{2}$$

$$\omega_1(h^2) \leqslant A_3\omega_2(h), \tag{3}$$

где постоянные A_2 и A_3 не зависят от h.

Эта лемма принадлежит Р. М. Тригубу [7]. При ее помощи мы получаем еще две нужные нам для дальнейшего леммы, формулировка первой из которых также содержится в [7].

Лемма 2. *Если $\omega_2(f; h) \leqslant \Omega(h)$, $\omega_2(g; h) \leqslant \Omega(h)$ и $f(x)g(x) = F(x)$, то*

$$\omega_2(F; h) \leqslant A_4\Omega(h), \tag{4}$$

где постоянная A_4 не зависит от h.

Действительно, так как

$$\begin{aligned} F(x+h) - 2F(x) + F(x-h) = g(x+h)[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + \\ + f(x)[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)] + [g(x+h) - g(x-h)][f(x) - f(x-h)], \end{aligned} \tag{5}$$

то

$$\omega_2(F; h) \leqslant \|g\|_C\Omega(h) + \|f\|_C\cdot\Omega(h) + 2\omega_1(g; h)\,\omega_1(f; h) \leqslant (\|f\|_C + \|g\|_C + 2A_2)\cdot\Omega(h).$$

Лемма 3. *Если при фиксированном целом $r \geqslant 0$ $\omega_2(f^{r}; h) \leqslant \Omega(h)$, $x = \varphi(t)$ — функция с ограниченной $(r+2)$-й производной $\varphi^{(r+2)}(t)$ и со значениями, содержащимися в области определения функции $f(x)$ и $F(t) = f[\varphi(t)]$, то тогда*

$$\omega_2(F^{(r)}; h) \leqslant A_5\Omega(h), \tag{6}$$

где постоянная A_5 не зависит от h.

Действительно, при $r = 0$ соотношение (6), учитывая (3), получим из неравенства

$$\begin{aligned} |\Delta_h^2F(t)| &= |f[\varphi(t+h)] - 2f[\varphi(t)] + f[\varphi(t-h)]| = \\ &= |f[\varphi(t) + \varphi'(t)h + O(h^2)] - 2f[\varphi(t)] + f[\varphi(t) - \varphi'(t)h + O(h^2)]| \leqslant \\ &\leqslant |f[\varphi(t) + \varphi'(t)h] - 2f[\varphi(t)] + f[\varphi(t) - \varphi'(t)h]| + O[\omega_1(f; h^2)] \leqslant A_5\Omega(h). \end{aligned}$$

Если же $r \geqslant 1$, то

$$F^{(r)}(t) = f^{(r)}[\varphi(t)][\varphi'(t)]^r + \frac{r(r-1)}{2}f^{(r-1)}[\varphi(t)]\cdot[\varphi'(t)]^{r-1}\varphi''(t) + \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ — функция, имеющая 2-ю ограниченную производную (так, что $\omega_2(\alpha; h) = O(h^2) = O(\Omega(h))$, и для доказательства (6) следует воспользоваться справедливостью этого неравенства при $r = 0$ и затем применить лемму 2.

Лемма 4. *Теорема 1 имеет место, когда множество $\mathfrak{M}$ состоит из двух симметричных относительно начала координат сегментов, т. е., когда $\mathfrak{M} = [-b, -a] \cup [a, b]$, где a и b удовлетворяют условию $0 < a < b$.*

Доказательство. Представив $f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, определим на сегменте $[a^2, b^2]$ функцию

$$\varphi(x) = f_1(\sqrt{x}), \qquad x \in [a^2, b^2].$$

Так как в силу леммы 3

$$\omega_2(\varphi^{(r)}; h) \leqslant A_5\omega_2(f_1^{(r)}; h) \leqslant A_5\omega_2(f^{(r)}; h),$$

то в силу упомянутой вначале справедливости теоремы 1 для случая, когда $\mathfrak{M}$ состоит только из одного сегмента, видим, что для функции $\varphi(x)$ при каждом натуральном ν найдется алгебраический многочлен $\pi_\nu(x)$ степени не выше ν такой, что

$$|\varphi(x) - \pi_\nu(x)| \leqslant A_6\left(\frac{\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right)^r \times$$

$$\times\ \omega_2\left(\varphi^{(r)}; \frac{\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant A_7\left(\frac{\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right)^r \omega_2\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{(x-a^2)(b^2-x)}}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right).$$

Поэтому при всех $x \in [a, b]$

$$|f_1(x) - \pi_\nu(x^2)| \leqslant A_7\left(\frac{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right)^r \times$$

$$\times\ \omega_2\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\right).$$

В силу четности функции $f_1(x)$ и многочлена $\pi_\nu(x^2)$ это неравенство справедливо при всех $x \in \mathfrak{M} = [-b, -a] \cup [a, b]$. Поэтому, полагая при каждом $n = 2, 3, \ldots$ $P_n(f_1; x) = \pi_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(x^2)$, получим последовательность многочленов степеней не выше $n-1$ таких, что

$$|f_1(x) - P_n(f_1; x)| \leqslant A_8\left(\frac{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^r \times$$

$$\times\ \omega_2\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right). \tag{7}$$

Так как функция $\frac{f_2(x)}{x} = \widetilde{f}_2(x)$ также четная, аналогично найдется последовательность многочленов $P_n(\widetilde{f}_2; x)$ таких, что

$$|f_2(x) - xP_n(\widetilde{f}_2; x)| \leqslant A_8'\left(\frac{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^r \times$$

$$\times\ \omega_2\left(f^r; \frac{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right). \tag{7'}$$

Поэтому, полагая $P_n(x) = P_n(f_1; x) + xP_n(\widetilde{f}_2; x)$, действительно получаем последовательность алгебраических многочленов степеней не выше n, которые удовлетворяют неравенству (1).

Лемма 5. *Всякую непрерывную на $[a, b]$, $a < b$, функцию $f(x)$ можно непрерывно продолжить на всю числовую ось так, чтобы модуль гладкости полученной при этом функции $F(x)$ при всех $h \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ с точностью до постоянной не превышал модуля гладкости функции $f(x)$.*
Точнее

$$\omega_2(F;\ h;\ -\infty,\ \infty) \leqslant 25\omega_2(f;\ h;\ a,\ b),\ \ h \in \left[0,\ \frac{b-a}{2}\right]. \tag{8}$$

Эта лемма (сформулированная в несколько иной форме) доказана нами в [3], стр. 341 — 342 [см. также [4]].

Лемма 6. *Пусть на множестве* $M = [a_1,\ b_1] \cup [a_2,\ b_2]$, *состоящем из двух непересекающихся сегментов* $(a_1 < b_1 < a_2 < b_2)$, *задана функция* $f(x)$ *с непрерывной r-й производной* $f^{(r)}(x)$ (r — целое $\geqslant 0$). *Тогда, если на* M

$$\omega_2(f^{(r)};\ h) \leqslant \Omega(h),$$

то функцию $f(x)$ *можно продолжить на сегмент* $[a_1,\ b_2]$ *таким образом, чтобы полученная после продолжения функция* $F(x)$ *имела на* $[a_1, b_2]$ *непрерывную r-ю производную* $F^{(r)}(x)$, *для которой*

$$\omega_2(F^{(r)};\ h) \leqslant A_9\Omega(h),$$

где постоянная A_9 *не зависит от* h.

Действительно, пользуясь леммой 5, продолжим $f^{(r)}(x)$ с $[a_1,\ b_1]$ на $\left[a_1,\ \frac{b_1+a_2}{2}\right)$ и с $[a_2,\ b_2]$ на $\left(\frac{b_1+a_2}{2},\ b_2\right]$, так, чтобы для полученной функции $\varphi(x)$ отдельно на каждом из промежутков $\left[a_1,\ \frac{b_1+a_2}{2}\right)$ и $\left(\frac{b_1+a_2}{2}, b_2,\right]$ выполнялось условие

$$\omega_2(\varphi;\ h) \leqslant 25\omega_2(f^{(r)};\ h). \tag{9}$$

После r-кратного интегрирования функции $\varphi(x)$ при подходящем выборе постоянных $\left(\text{на } \left[a_1,\ \frac{b_1+a_2}{2}\right) \text{ одних, а на } \left(\frac{b_1+a_2}{2},\ b_2\right] \text{— других}\right)$ получим некоторую функцию $F_1(x)$, которая на M совпадает с $f(x)$.

Если теперь $\alpha(x)$ — какая-нибудь функция, которая имеет на $[a_1,\ b_2]$ ограниченную $(r+2)$-ю производную (так, что $\omega_2(\alpha^{(r)};\ h) \leqslant A_{10}\cdot h^2 \leqslant \leqslant A_{11}\omega_2(f^{(r)};\ h)$) и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [a_1,\ b_1] \cup [a_2,\ b_2], \\ 0 & \text{при } x \in \left[b_1 + \dfrac{a_2-b_1}{3},\ a_2 - \dfrac{a_2-b_1}{3}\right] \end{cases}$$

$\Bigg($на сегменте $\left[b_1,\ b_1 + \frac{a_2-b_1}{3}\right] = \left[b_1,\ \frac{2b_1+a_2}{3}\right]$ можно, например, положить $\alpha(x) = C\int\limits_x^{\frac{1}{3}(2b_1+a_2)} (t-b_1)^{r+1}\left(\frac{2b_1+a_2}{3} - t\right)^{r+1} dt$, где C взято так, чтобы $\alpha(b_1) = 1\Bigg)$, то функция $F(x) = F_1(x)\cdot\alpha(x)$ в силу леммы 2 будет удовлетворять всем условиям леммы 6.

Лемма 7. *Для каждого из концов* a_i *и* b_i *какого-либо составляющего сегмента* $[a_i,\ b_i]$ *множества* $\mathfrak{M}$, *о котором идет речь в теореме 1, при любом* $n = 1, 2, \ldots$ *найдутся многочлены* $P_n(a_i;\ x)$ *и* $P_n(b_i;\ x)$ *степени не выше* n *такие, что при всех* $x \in \mathfrak{M}$

$$|f(x)-P_n(a_i;\ x)| \leqslant A_{12}\left(\frac{\sqrt{|x-a_i|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\omega_2\left(f^{(r)};\ \frac{\sqrt{|x-a_i|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad (10)$$

и соответственно

$$|f(x)-P_n(b_i;\ x)| \leqslant A_{12}\left(\frac{\sqrt{|x-b_i|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\omega_2\left(f^{(r)};\ \frac{\sqrt{|x-b_i|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right), \quad (10')$$

где постоянная A_{12} не зависит от n.

Покажем сначала как строить многочлены $P_n(a_i;\ x)$.

Если $i=1$, то пользуясь леммой 6, продолжим функцию $f(x)$ на сегмент $[a_1, b_k]$ так, чтобы для полученной после продолжения функции $F(x)$ выполнялось условие

$$\omega_2(F^{(r)};\ h) \leqslant A_{13}\omega_2(f^{(r)};\ h), \quad (11)$$

и после этого, пользуясь справедливостью теоремы 1 для одного сегмента, найдем последовательность многочленов $\{P_n(a_1;\ x)\}$ такую, что при всех $x \in [a_1, b_k]$

$$|F(x)-P_n(a_1;\ x)| \leqslant A_{14}\left(\frac{\sqrt{(x-a_1)(b_k-x)}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \times$$

$$\times\,\omega_2\left(F^{(r)};\ \frac{\sqrt{(x-a_1)(b_k-x)}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant A_{15}\left(\frac{\sqrt{|x-a_1|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\omega_2\left(f^{(r)};\ \frac{\sqrt{|x-a_1|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad (12)$$

и, значит, такую, что при $x \in \mathfrak{M}$ будет выполняться неравенство (10).

Если $i > 1$, то пользуясь леммами 5 и 6, продолжим $f(x)$ на некоторую симметричную относительно $[b_{i-1}, a_i]$ пару сегментов $[c_i, b_{i-1}] \cup [a_i, d_i]$, содержащую $\mathfrak{M}$ так, чтобы для полученной после продолжения функции $F(x)$ выполнялось условие (11) и затем, пользуясь леммой 4, найдем последовательность многочленов $P_n(a_i, x)$ такую, чтобы при всех $x \in [c_i, b_{i-1}] \cup [a_i, d_i]$

$$|F(x)-P_n(a_i;\ x)| \leqslant A_{16}\left(\frac{\sqrt{|(x-c_i)(x-b_{i-1})(x-a_i)(x-d_i)|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \times$$

$$\times\,\omega_2\left(F^{(r)};\ \frac{\sqrt{|(x-a_i)\ldots(x-d_i)|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant A_{17}\left(\frac{\sqrt{|x-a_i|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\omega_2\left(f^{(r)};\ \frac{\sqrt{|x-a_i|}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),$$

и значит, такую, что при $x \in \mathfrak{M}$ будет выполняться неравенство (10).

Последовательность многочленов $P_n(b_i;\ x)$ строится аналогично.

Лемма 8. *Пусть дано $2k$ алгебраических многочленов степеней $\leqslant (r+1)(2k-1)$ (k и r те же, что и в условии теоремы 1)*

$$\pi_1(x),\ \pi_2(x),\ \ldots,\ \pi_{2k}(x),$$

которые не имеют ни одного общего для них всех корня. Тогда существует по крайней мере одна система многочленов

$$\varrho_1(x),\ \varrho_2(x),\ \ldots,\ \varrho_{2k}(x)$$

степеней $\leqslant (2k-1)[(r+1)(2k-1)-1] < 4k^2(r+1)$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{2k} \pi_j(x)\varrho_j(x) \equiv 1.$$

Эта лемма доказана нами в более общем виде в [5].

Доказательство теоремы 1. Положим

$$\pi(a_j; x) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq j}}^{k} (x - a_\nu)^{r+1} \prod_{\nu=1}^{k} (x - b_\nu)^{r+1},$$

$$\pi(b_j; x) = \prod_{\nu=1}^{k} (x - a_\nu)^{r+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq j}}^{k} (x - b_\nu)^{r+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{13}$$

и, пользуясь леммой 8, найдем многочлены $\varrho(a_j; x)$ и $\varrho(b_j; x)$ степеней не выше $4k^2(r+1)$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} [\pi(a_j; x)\varrho(a_j; x) + \pi(b_j; x)\varrho(b_j; x)] \equiv 1. \tag{14}$$

Тогда, если $P_n(a_j; x)$ и $P_n(b_j; x)$ — многочлены, построенные при помощи леммы 7, то, полагая при каждом $n = 1, 2, \ldots$

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{k} [P_n(a_j; x)\pi(a_j; x)\varrho(a_j; x) + P_n(b_j; x)\pi(b_j; x)\varrho(b_j; x)] \tag{15}$$

для каждого $x \in [a_i, b_i]$, где i любое фиксированное $\geqslant 1$ и $\leqslant k$, получаем

$$|f(x) - P_n(x)| = \Big|\sum_{j=1}^{k} \{[f(x) - P_n(a_j; x)]\pi(a_j; x)\varrho(a_j; x) +$$

$$+ [f(x) - P_n(b_j; x)]\pi(b_j; x)\varrho(b_j; x)\}\Big| \leqslant A_{18} \sum_{j=1}^{k} [|f(x) - P_n(a_j; x)| \times$$

$$\times |\pi(a_j; x)| + |f(x) - P_n(b_j; x)| \cdot |\pi(b_j; x)|] \leqslant$$

$$\leqslant A_{19}\left(\frac{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^r \omega_2\left(f^{(r)}; \frac{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Теорема полностью доказана.

Пользуясь этой теоремой и теоремами 3 и 6 из [2] получим следующие две теоремы, дающие конструктивную характеристику для непериодических функций, заданных на конечной системе сегментов.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из конечного числа k непересекающихся сегментов $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, имела при некотором целом неотрицательном r производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального n нашелся алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, чтобы на каждом из сегментов $[a_i, b_i]$ выполнялось неравенство*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant A_{20}\left(\frac{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{r+\alpha}, \tag{16}$$

где постоянная A_{20} не зависит от x, n и i.

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из конечного числа k непересекающихся сегментов $[a_i, b_i]$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, имела при некотором целом неотрицательном $r\,(r = 0, 1, 2, \ldots)$ квазигладкую (соответственно гладкую) производную* *r-го порядка* $f^{(r)}(x)$[1], *необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального* n *нашелся алгебраический многочлен* $P_n(x)$ *степени не выше* n *такой, чтобы на каждом из сегментов* $[a_i, b_i]$ *выполнялось неравенство*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant A_{21}\left(\frac{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{r+1} \tag{17}$$

$$\left(\textit{соответственно, чтобы } f(x) - P_n(x) = o\left\{\left(\frac{\sqrt{(x-a_i)(b_i-x)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{r+1}\right\}\right),$$

где постоянная A_{21} *не зависит от* x, n *и* i.

Заметим, наконец, что если воспользоваться не теоремой 3 из работы [2], а ее обобщением, которое было получено А. Ф Тиманом (см. [6], 6.2), то убедимся, что теорема, аналогичная теореме 2, имеет место также для классов функций, определяющихся любым модулем непрерывности $\omega(\delta)$, удовлетворяющим условию $h\int\limits_h^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du = O[\omega(h)]$, если $r = 0$ и условиям $h\int\limits_h^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du = O[\omega(h)]$ и $\int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u}\,du = O[\omega(h)]$, если $r \geqslant 1$.

Примечание при корректуре. Совсем недавно мною и независимо от меня Ю. А. Брудным было замечено, что при помощи методов теории функций комплексного переменного изложенные в [9] и в этой работе результаты допускают дальнейшие обобщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и Ю. А. Томчук, К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах, ДАН СССР, т. 138, № 4, 1961, 743—746.
2. В. К. Дзядык, О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip α $(0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке.
3. В. К. Дзядык, О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, 1958, 337—354.
4. В. К. Дзядык, Дальнейшее усиление теоремы Джексона о приближении обыкновенными многочленами непрерывных функций, ДАН СССР, 121, 1958, 403—406.
5. В. К. Дзядык, К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, 1962, 797—824.
6. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
7. Р. М. Тригуб, Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси, ДАН СССР, т. 132, № 2, 1960, 303—306.
8. G. Freud, Über die Approximation reeller stetiger Funktionen durch gewöhnliche Polynome, Math. Ann., 137, 1959, 17—25.
9. Ю. А. Брудный, Конструктивная характеристика функций, заданных на некоторых совершенных множествах действительной оси, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, М., 1961, 122—126.

Поступила 2.II 1962 г.
Киев

---

[1] Т. е. удовлетворяющую условию $\omega_2(f^{(r)}; h) = O(h)$ (соответственно $\omega_2(f^{(r)}; h) = o(h)$).