Асимптотические неравенства, приложимые к некоторым термодинамическим функциям

Т. В. Морозова

В настоящей статье будет рассмотрена одна из задач так называемой эргодической проблемы. Эргодическая проблема представляет собой логическое обоснование замены временных средних некоторых функций их фазовыми средними, взятыми по всему фазовому пространству или по определенным образом выбранной его части. Фазовые средние находятся при помощи функций распределения. Функции распределения дают вероятности различных конфигураций n молекул из общего числа N. Эти функции очень удобны при рассмотрении задач статистической механики. Они дают возможность сравнительно просто определять термодинамические функции. Для этой цели весьма удобно использовать каноническое распределение Гиббса.

Данная статья дает вывод асимптотической формулы, дающей приближенное значение логарифма статистического веса при помощи канонического распределения Гиббса. Вывод асимптотического неравенства дается в виде доказательства теоремы.

Рассмотрим пространство Ω с точками $x_1, \ldots, x_N$ и возьмем систему определенных в этом пространстве функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$. Кроме этого, возьмем систему вещественных переменных $\mu_1, \ldots, \mu_L$ (где L — ограниченное число), достаточно близких к некоторым фиксированным числам. При таких условиях докажем следующую теорему.

Теорема. *Если дан ряд положительных чисел, удовлетворяющих условиям*

$$\varepsilon_N > 0, \quad \eta'_N > 0, \; \ldots, \; \eta^L_N > 0,$$

$$N\eta'_N \geqslant Q, \; \ldots, \; N\eta^L_N > Q, \qquad Q > 0,$$

то

$$\frac{1}{N} \ln \int_{U_E} \ldots \int dx_1 \ldots dx_N - \int_{\Omega} \varrho(x) \ln \frac{1}{\varrho(x)}\, dx \to 0$$

при $N \to \infty$,
где

$$\varrho(x) = \frac{e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \lambda_s \varphi_s(x)}}{\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \lambda_s \varphi_s(x)}\, dx}.$$

Здесь U_E — множество точек пространства Ω^N, ограниченных неравенствами

$$E_s \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_s(x_k) \leqslant E_s + \eta_N^s, \qquad s = 1, \ldots, L,$$

$E_1, \ldots, E_L$ — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$|E_s - E_s^0| \leqslant \varepsilon_N, \qquad s = 1, \ldots, L.$$

Доказательство. Возьмем числа $\varepsilon > 0$, $N_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, для которых при $N \geqslant N_0$ будет выполняться

$$|E_s - E_s^0| \leqslant \varepsilon_N, \qquad s = 1, \ldots, L,$$

и на основании лемм 2 и 3 работы [4] напишем следующее неравенство

$$\frac{\alpha_0}{N^{\frac{L}{2}}} \left\{ \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s \psi_s(x)} dx \right\}^N \leqslant \int \ldots \int\limits_{V(E)} dx_1 \ldots dx_N \leqslant \frac{\alpha_1}{N^{\frac{L}{2}}} \left\{ \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s \psi_s(x)} dx \right\}^N, \quad (1)$$

где $V(E)$ — множество точек пространства, определенных неравенствами

$$E_s \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_s(x_k) \leqslant E_s + \frac{Q}{N},$$

$$\psi_s(x) = \varphi_s(x) - E_s.$$

Подставляя это соотношение в неравенство (1), получаем

$$\frac{\alpha_0}{N^{\frac{L}{2}}} \left\{ \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s \varphi_s(x)} dx \right\}^N e^{-N \sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s E_s} \leqslant \int \ldots \int\limits_{V(E)} dx_1 \ldots dx_N \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_1}{N^{\frac{L}{2}}} \left\{ \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s \varphi_s(x)} dx \right\}^N e^{-N \sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s E_s}.$$

Так как $V(E)$ — множество точек, определенных неравенствами

$$E_s \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_s(x_k) \leqslant E_s + \frac{Q}{N}, \qquad s = 1, \ldots, L,$$

а U_E — множество точек, определенных неравенствами

$$E_s \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_s(x_k) \leqslant E_s + \eta_N^s,$$

то согласно условию получим следующее:

$$\int \ldots \int\limits_{U_E} dx_1 \ldots dx_N \geqslant \int \ldots \int\limits_{V(E)} dx_1 \ldots dx_N. \quad (2)$$

На основании леммы 4 работы [4]

$$\mu_s^N = \lambda_s + \zeta_s^N, \tag{3}$$

где $\zeta_s^N \to 0$ при $N \to \infty$, преобразуем неравенство (2) следующим образом:

$$\int\limits_{U_E}\ldots\int dx_1\ldots dx_N \geqslant \int\limits_{V(E)}\ldots\int dx_1\ldots dx_N \geqslant \frac{\alpha_0}{N^{\frac{L}{2}}}\left\{\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\mu_s\varphi_s(x)}dx\right\}^N e^{-N\sum\limits_{s=1}^{L}\mu_s E_s};$$

учитывая (3), это неравенство можно представить в виде

$$\int\limits_{U_E}\ldots\int dx_1\ldots dx_N \geqslant \frac{\alpha_0}{N^{\frac{L}{2}}}\left\{\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L}(\lambda_s+\zeta_s^N)\varphi_s(x)}dx\right\}^N e^{-N\sum\limits_{s=1}^{L}(\lambda_s+\zeta_s^N)E_s}. \tag{4}$$

Логарифмируя, получаем

$$\ln\int\limits_{U_E}\ldots\int dx_1\ldots dx_N \geqslant N\ln\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L}(\lambda_s+\zeta_s^N)\varphi_s(x)}dx - N\sum_{s=1}^{L}\lambda_s E_s -$$

$$- N\sum_{s=1}^{L}\zeta_s^N E_s + \ln\frac{\alpha_0}{N^{\frac{L}{2}}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{N}\ln\int\limits_{U_E}\ldots\int dx_1\ldots dx_N \geqslant \ln\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\lambda_s\varphi_s(x)}\cdot e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\zeta_s^N\varphi_s(x)}dx -$$

$$-\sum_{s=1}^{L}\lambda_s E_s - \sum_{s=1}^{L}\zeta_s^N E_s + \frac{1}{N}\ln\frac{\alpha_0}{N^{\frac{L}{2}}}.$$

Полагая для сокращения записи

$$\frac{1}{N}\ln\frac{\alpha_0}{N^{\frac{L}{2}}} - \sum_{s=1}^{L}\zeta_s^N E_s = -\delta_N,$$

будем иметь

$$\frac{1}{N}\ln\int\limits_{U_E}\ldots\int dx_1\ldots dx_N \geqslant \ln\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\lambda_s\varphi_s(x)}\cdot e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\zeta_s^N\varphi_s(x)}dx - \sum_{s=1}^{L}\lambda_s E_s - \delta_N. \tag{5}$$

Далее,

$$\int\limits_{\Omega}\varrho(x)\ln\frac{1}{\varrho(x)}dx = \int\limits_{\Omega}\varrho(x)\ln\frac{\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\lambda_s\varphi_s(x)}}{e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\lambda_s\varphi_s(x)}}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \varrho(x) \ln \left(\int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{l} \lambda_s \varphi_s(x} dx \right) dx - \sum_{s=1}^{L} \lambda_s \int\limits_{\Omega} \varrho(x) \varphi_s(x)\, dx =$$

$$= \ln \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \lambda_s \varphi_s(x)} dx - \sum_{s=1}^{L} \lambda_s E_s,$$

так как

$$\int\limits_{\Omega} \varrho(x)\, dx = 1, \qquad \int\limits_{\Omega} \varphi_s(x) \varrho(x)\, dx = E_s.$$

И окончательно получим следующее соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \varrho(x) \frac{1}{\varrho(x)} dx = \ln \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \lambda_s \varphi_s(x)} dx - \sum_{s=1}^{L} \lambda_s E_s. \tag{6}$$

Сравнивая соотношения (5) и (6) получаем неравенство

$$\frac{1}{N} \ln \int\limits_{U_E} \!\!\dots\!\! \int dx_1 \dots dx_N \geqslant \int\limits_{\Omega} \varrho(x) \ln \frac{1}{\varrho(x)} dx - \delta_N. \tag{7}$$

Возьмем некоторое множество

$$\sum_{l} V(E + lQ)$$

такое, что

$$U_E \subset \sum_{l} V(E + lQ),$$

где
$$l = (l_1, \dots, l_L), \quad 0 \leqslant l_s \leqslant l_s^*,$$

а l_s^* — подчиняются неравенствам

$$(l_s^* + 1) Q \geqslant \eta_N^s > l_s^* Q;$$

тогда

$$\int\limits_{U_E} \!\!\dots\!\! \int dx_1 \dots dx_N \leqslant \sum_{l} \int\limits_{V(E+lQ)} \!\!\dots\!\! \int dx_1 \dots dx_N,$$

но

$$\int\limits_{V(E+lQ)} \!\!\dots\!\! \int dx_1 \dots dx_N \leqslant \frac{\alpha_1}{N^{\frac{L}{2}}} \left\{ \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s \varphi_s(x)} dx \right\}^N \cdot e^{-N \sum\limits_{s=1}^{L} \mu_s E_s}.$$

Здесь $\mu_s(E + lQ) = \lambda_s + \zeta_{s,l}^N, \quad \zeta_{s,l}^N \to 0$ при $N \to \infty$, поэтому

$$\int\limits_{V(E+lQ)} \!\!\dots\!\! \int dx_1 \dots dx_N \leqslant \frac{\alpha_1}{N^{\frac{L}{2}}} \sum_{l} \left\{ \int\limits_{\Omega} e^{\sum\limits_{s=1}^{L} (\lambda_s + \zeta_{s,l}^N) \varphi_s(x)} dx \right\}^N \cdot e^{-N \sum\limits_{s=1}^{L} (\lambda_s + \zeta_{s,l}^N) \varphi_s(x)}.$$

Учитывая все изложенное выше получаем:

$$\int\limits_{U_E}\cdots\int dx_1\ldots dx_N \leqslant \frac{\alpha_1}{N^{\frac{L}{2}}}\sum_l\left\{\int\limits_\Omega e^{\sum\limits_{s=1}^{L}(\lambda_s+\zeta_{s,\,l}^N)\varphi_s(x)}\,dx\right\}^N\cdot e^{-N\sum\limits_{s=1}^{L}(\lambda_s+\zeta_{s,\,l}^N)E_s}.$$

Возьмем логарифм правой и левой частей этого неравенства:

$$\ln\int\limits_{U_E}\cdots\int dx_1\ldots dx_N \leqslant \ln\left[\frac{\alpha_1}{N^{\frac{L}{2}}}\sum_l\left\{\int\limits_\Omega e^{\sum\limits_{s=1}^{L}(\lambda_s+\zeta_{s,\,l}^N)\varphi_s(x)}\,dx\right\}^N\cdot e^{-N\sum\limits_{s=1}^{L}(\lambda_s+\zeta_{s,l}^N)E_s}\right].$$

А так как $e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\zeta_{s,\,l}^N\varphi_s(x)} < e^{\overset{*}{\varepsilon}_N}$, при $N\to\infty$, то получим следующее:

$$\ln\int\limits_{U_E}\cdots\int dx_1\ldots dx_N < N\ln\int\limits_\Omega e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\lambda_s\varphi_s(x)}\,dx+\ln\frac{\alpha_1 L}{N^{\frac{L}{2}}}+$$

$$+N\varepsilon_N^*-N\sum_{s=1}^{L}\lambda_s E_s-N\sum_{s=1}^{L}\zeta_{s,\,l}^N E_s.$$

Введем обозначение

$$\delta_N'=\frac{1}{N}\ln\frac{\alpha_1 L}{N^{\frac{L}{2}}}+\varepsilon_N^*-\sum_{s=1}^{L}\zeta_{s,\,l}^N E_s,\quad \delta_N'\to 0 \text{ при } N\to\infty$$

и окончательно получим

$$\frac{1}{N}\ln\int\limits_{U_E}\cdots\int dx_1\ldots dx_N < \ln\int\limits_\Omega e^{\sum\limits_{s=1}^{L}\lambda_s\varphi_s(x)}\,dx-\sum_{s=1}^{L}\lambda_s E_s+\delta_N'. \tag{8}$$

Вычитая из (8) соотношение (6), получаем неравенство

$$\frac{1}{N}\ln\int\limits_{U_E}\cdots\int dx_1\ldots dx_N-\int\limits_\Omega \varrho(x)\ln\frac{1}{\varrho(x)}\,dx < \delta_N'. \tag{9}$$

Из сравнения неравенств (7) и (9) и вытекает доказательство нашей теоремы:

$$\frac{1}{N}\ln\int\limits_{U_E}\cdots\int dx_1\ldots dx_N \to \int\limits_\Omega \varrho(x)\ln\frac{1}{\varrho(x)}\,dx,$$

или

$$\left|\frac{1}{N}\ln\int\limits_{U_E}\cdots\int dx_1\ldots dx_N-\int\limits_\Omega \varrho(x)\ln\frac{1}{\varrho(x)}\,dx\right| < \varepsilon_N'.$$

Полученная формула дает возможность определить энтропию системы, пользуясь каноническим распределением Гиббса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Гиббс, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, М.—Л., 1946, 203.
2. А. Я. Хинчин, Математические основания статистической механики Гостехиздат, М.—Л., 1943, 128.

3. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, О приложении метода наименьшего спуска к доказательству некоторых асимптотических неравенств, Наукові записки КДУ, т. IV, вып. 5, 1939, 221—250.

4. Т. В. Морозова, Метод наименьшего спуска в теории статистического равновесия, Изд-во КГУ, Киев, 1957, 40.

5. Т. Хилл, Статистическая механика, М., 1960, 485.

Поступила 10.X 1961 г.
Киев

Об одной предельной теореме теории массового обслуживания

С. М. Броди

В этой заметке мы докажем предельную теорему в случае большой загрузки обслуживающего прибора для процесса $\eta(t)$ — времени ожидания требования, поступившего на обслуживание в момент t, подробно изученного в работе Такача [1].

Предположим, что к одному обслуживающему прибору поступают требования в моменты $0<t_1<t_2<\ldots<t_n$ и что случайный процесс $\{t_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ является пуассоновским с параметром λ (простейший поток), а длительности обслуживания $\{\gamma_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ соответствующих требований—независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $P\{\gamma_i \leqslant x\} = H(x)$, с конечным математическим ожиданием $\mu = \int\limits_0^\infty x dH(x) < \infty$. Требования обслуживаются в порядке поступления. Если прибор свободен, то требование немедленно обслуживается, а если занят, то требование становится в очередь. При этих предположениях случайный процесс $\eta(t)$ является однородным марковским процессом, который в моменты t_i имеет скачки величиной γ_i, а в промежутке времени $t_i - t_{i-1}$ линейно убывает с угловым коэффициентом -1 однако, достигнув значения нуль, процесс сохраняет его до момента поступления очередного требования.

Таким образом,

$$\eta(t) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \eta(t_i) - (t - t_i), & \text{если} \quad \eta(t_i) > t - t_i, \\ 0, & \text{если} \quad \eta(t_i) \leqslant t - t_i, \end{array}\right\} \text{ при } t \neq t_i, \\ \eta(t_i - 0) + \gamma_i \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } t = t_i. \end{cases}$$

Вкратце напомним некоторые результаты статьи [1], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $P\{\eta(t) \leqslant x\} = F(t, x)$, $P\{\eta(t) \leqslant 0\} = F(t)$ и

$$\widetilde{F}(t, s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d_x F(t, x), \quad F^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt, \quad \widetilde{H}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dH(x).$$

Теорема 1.

$$\widetilde{F}(t, s) = e^{\{s - \lambda[1 - \widetilde{H}(s)]\}t} \left[1 - s\int\limits_0^t e^{-\{s-\lambda[1-\widetilde{H}(s)]\}u} F(u)\, du\right]. \tag{1}$$

Теорема 2. *Если $\varrho = \lambda\mu < 1$, то предельное распределение $\lim\limits_{t\to\infty} F(t,x) = F_1(x)$ существует и не зависит от начального распределения $F_0(x)$ и $\widetilde{F}_1(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF_1(x)$ однозначно определяется формулой*