О функционалах, определенных на некоторых классах аналитических функций

В. Г. Лозовик

Здесь рассматриваются задачи об отыскании множеств значений функционалов, определенных на некоторых классах аналитических функций. Вопросы такого характера рассматривались в работах [1 — 8] и др.

1°[1]. Пусть даны функции $g_k(z,t)$, $k=1,2,\ldots,n$, комплексного переменного $z=u+iv$ и вещественного переменного t, непрерывные по t на сегменте $a \leqslant t \leqslant b$ при всех z из некоторой области G. Считая $z_k \in G$ фиксированными точками, положим $g_k(z_k,t)=\xi_{2k-1}(t)+i\xi_{2k}(t)$ и образуем систему функционалов

$$f_k(z_k;\mu)=\int\limits_a^b g_k(z_k,t)\,d\mu(t)=x_{2k-1}[\mu]+ix_{2k}[\mu], \tag{1}$$

$k=1,2,\ldots,n$. Здесь $\mu(t)\uparrow$, $a\leqslant t\leqslant b$, $\mu(b)-\mu(a)=1$. Пусть M означает класс всех функций $\mu(t)$ с такими свойствами.

Обозначим через Γ годограф вектор-функции

$$\xi(t)=\{\xi_1(t),\xi_2(t),\ldots,\xi_{2n-1}(t),\xi_{2n}(t)\},\quad a\leqslant t\leqslant b,$$

а через D — его выпуклую оболочку. Если функция $\mu(t)$ пробегает класс M, то точка

$$x[\mu]=\{x_1[\mu],x_2[\mu],\ldots,x_{2n-1}[\mu],x_{2n}[\mu]\}$$

пробегает D. Мы скажем, что точка $x[\mu]$ является образом функции $\mu(t)\in M$. Если в классе M определено несколько функционалов $J_\nu[\mu]=\Phi_\nu(x[\mu])$, $\nu=1,2,\ldots,r$, где $\Phi_\nu(x)$, $x\in D$ — вещественные или комплекснозначные, быть может, разрывные, функции $2n$ вещественных переменных, то представляет интерес разыскание множества E (в комплексном r-мерном пространстве) значений вектор-функционала

$$\Phi(x[\mu])=\{\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_r\},$$

а также той части E, которая удовлетворяет заданным дополнительным условиям. Об этой части E мы скажем, что она является условным множеством значений рассматриваемого вектор-функционала.

Из связности кривой Γ вытекает [9—10], что всякая точка ее выпуклой оболочки является образом некоторой ступенчатой функции класса M, имеющей не более $2n$ точек роста, поэтому для определения множества E достаточно ограничиться такими функциями.

Будем считать, что функции $\xi_k(t)$, $k=1,2,\ldots,N$ (N — необязательно четное число) периодичны, с периодом, равным $b-a$, и дважды дифференцируемы. Тогда кривая Γ становится замкнутой и гладкой. Пусть какая-нибудь из ее опорных плоскостей задается уравнением $\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k x_k=p$, $\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k^2=1$. Если некоторая точка $A\in\Gamma$ лежит в этой плоскости, то и касательная к Γ в точке A лежит в этой плоскости. Отсюда—следующий вывод:

---

[1] Примечание при корректуре. В п. 2° иллюстрируется применение результатов п. 1° рассмотрением лишь одной задачи об отыскании условного множества. Метод является общим и пригоден к решению многих других задач такого типа.

если при любых вещественных α_k, $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 = 1$, функция $F(t) \equiv \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \xi_k(t)$ такова, что в полусегменте $a < t \leqslant b$ имеется не более m точек, удовлетворяющих условиям

$$F(t_1) = F(t_2) = \ldots = F(t_m);\ F'(t_1) = F'(t_2) = \ldots = F'(t_m) = 0, \quad (Z)$$

то никакая опорная плоскость кривой Γ не содержит более m точек этой кривой, и $m \leqslant \left[\frac{s}{2}\right]$, где s — наибольшее возможное число стационарных точек функции $F(t)$ в полусегменте $a < t \leqslant b$ при любых вещественных α_k, $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 = 1$. Это утверждение иным методом получено и в других терминах сформулировано В. А. Зморовичем [2] применительно к задаче об экстремуме некоторых функционалов. Один частный случай встречается ранее [11].

Пусть при любых вещественных α_k, $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 = 1$, функция $F(t) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \xi_k(t)$ имеет в полусегменте $a < t \leqslant b$ не более $s \leqslant N$ стационарных точек, а кривая Γ не имеет на этом полусегменте кратных точек. Тогда с помощью методов [12] устанавливаются следующие факты:

а) Если число точек роста функции $\mu(t) \in M$ не превосходит $\left[\frac{s}{2}\right]$, то ее образ лежит на границе D; в противном случае он лежит внутри D.

б) Всякая точка границы D является образом одной единственной функции $\mu(t) \in M$, если не различать двух функций этого класса, совпадающих во всех точках непрерывности, и считать, что $\mu(a) = \mu(a+0) = 0$ для любой функции $\mu(t) \in M$.

2°. Покажем, как с помощью приведенных выше соображений можно найти условные области значений некоторых комплекснозначных функционалов.

Рассмотрим функции $w = w(z)$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, регулярные в круге $|z| < 1$ и однолистно отображающие его на выпуклые области. Известно [13], что

$$w(z) = \int_0^z \exp\left\{-2\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - \zeta e^{-it})\, d\mu(t)\right\} d\zeta = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k,$$

$$|z| < 1,\ \mu(t)\uparrow,\ \mu(-\pi) = \mu(-\pi + 0) = 0,\ \mu(\pi) = 1.$$

Найдем множество возможных значений

$$w'(z_0) = \exp\left\{-2\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - z_0 e^{-it})\, d\mu(t)\right\},$$

считая, что $z_0 = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant r < 1$, — заданная точка, а коэффициенты $c_2, c_3, \ldots, c_n$ допустимым образом фиксированы. Поскольку заданием этих коэффициентов однозначно определяются моменты $\bar{a}_k = b_{2k-1} - ib_{2k} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и, наоборот, заданием моментов $\bar{a}_k$

однозначно определяются указанные коэффициенты, будем считать, что задача состоит в разыскании множества E_0 возможных значений вектор-функционала $\Phi[\mu] = \{w'(z_0), \; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ при допустимым образом фиксированных $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

В нашем случае:

$$\xi_1(t) = 2\mathrm{Re}\ln[1 - re^{-i(t-\varphi)}] = \ln[1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2],$$

$$\xi_2(t) = 2\mathrm{Im}\ln[1 - re^{-i(t-\varphi)}] = 2\mathrm{arctg}\,\frac{r\sin(t-\varphi)}{1 - r\cos(t-\varphi)},$$

$$\xi_3(t) = \cos t, \; \xi_4(t) = \sin t, \ldots, \xi_{2n-1}(t) = \cos(n-1)t,$$

$$\xi_{2n}(t) = \sin(n-1)t; \; x_k[\mu] = \int_{-\pi}^{\pi} \xi_k(t)\,d\mu(t); \; k = 1, 2, \ldots, 2n;$$

Γ — годограф вектор-функции $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_{2n}(t)\}$; D — его выпуклая оболочка. Функция $F(t) = \sum\limits_{k=1}^{2n} \alpha_k \xi_k(t)$ имеет при любых вещественных α_k, $\sum\limits_{k=1}^{2n} \alpha_k^2 = 1$, в полусегменте $-\pi < t \leqslant \pi$ не более $2n$ стационарных точек, кривая Γ при $-\pi < t \leqslant \pi$ не имеет кратных точек. Поэтому образ функции $\mu(t) \in M$ лежит на границе D тогда и только тогда, когда функция $\mu(t)$ имеет не более n точек роста. Следовательно, чтобы исчерпать все множество E допустимых значений вектор-функционала $\Phi[\mu]$ в n-мерном комплексном пространстве (без предположения о том, что рассматриваемые моменты фиксированы) достаточно ограничиться ступенчатыми функциями $\mu(t) \in M$, имеющими не более $(n+1)$ точек роста.

Возвратимся к предположению о том, что $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ допустимым образом фиксированы. Двумерная плоскость P: $x_3 = b_1$, $x_4 = b_2, \ldots, x_{2n} = b_{2n-2}$, параллельная координатной плоскости (x_1, x_2), пересекает границу D по выпуклому контуру L, быть может, вырождающемуся в точку. Обозначим $D \cap P = Q$.

Точка $\bar{\xi}$ лежит на контуре L тогда и только тогда, когда она является концом вектора $\bar{\xi}$ следующего вида $\bar{\xi} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \xi(t_j)$, где λ_j и t_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ составляют решение системы

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{ikt_j} = a_k; \; \lambda_j \geqslant 0; \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \; a_0 = 1. \tag{2}$$

Если точка $B(b_1, b_2, \ldots, b_{2n-2})$ лежит внутри выпуклой оболочки K годографа вектор-функции

$$\eta(t) = \{\cos t, \sin t, \ldots, \cos(n-1)t, \; \sin(n-1)t\}, \; -\pi \leqslant t \leqslant \pi,$$

то, как вытекает из [12], для каждой точки $\bar{\xi} \in L$ все величины λ_j положительны, все e^{it_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$, различны; каждая точка $\bar{\xi} \in L$ полностью определяется из системы (2) заданием одной (любой) из величин t_j и два решения $\{\lambda_j; e^{it_j}\}$ и $\{\lambda_j'; e^{it_j'}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системы (2) определяют одну и ту же точку $\bar{\xi} \in L$ тогда и только тогда, когда они идентичны, если не учитывать возможного различия в нумерации компонент.

Если B лежит на границе K, то контур L вырождается в одну единственную точку $\bar{\xi}$, причем хотя бы одна из величин λ_j аннулируется. Если $B \bar{\in} K$, то Q — пустое множество. О расположении точки B относительно K можно судить по известным [12, 14] признакам.

Нетрудно убедиться в том, что, если точка B лежит внутри K, а параметр t_1 пробегает сегмент $[-\pi, \pi]$, соответствующая точка $\bar{\xi} \in L$ совершает в точности n простых обходов контура L. Для совершения одного такого обхода достаточно, чтобы параметр t_1 пробежал сегмент $[-\pi, t_0]$, где t_0 определяется так: будем двигаться из точки $\eta(-\pi)$ вдоль прямой, проходящей через точку B, в направлении вектора $\overrightarrow{\eta(-\pi)B}$ до пересечения с границей K; пусть пересечение имеет место в точке B_0; эта точка является образом одной единственной [в смысле п. 1° б)] функции $\mu_0(t) \in M$; тогда t_0, $-\pi < t_0 < \pi$ — наименьшая из ее точек роста.

Пусть Q_0 означает проекцию Q на координатную плоскость (x_1, x_2); Q_0 — замкнутая выпуклая область. Теперь $w'(z_0) = \exp\{-(x_1 + ix_2)\}$ становится функцией комплексного переменного $x_1 + ix_2 = \zeta[\mu] \in Q_0$. Поскольку $\max_{\mu \in M} x_2[\mu] - \min_{\mu \in M} x_2[\mu] < 2\pi$, функция $\exp(-\zeta)$ осуществляет однолистное отображение Q_0, и, если параметр t_1 пробежит сегмент $[-\pi, t_0]$, то точка $w'(z_0) = \exp(-\zeta)$ один раз обойдет границу образа Q_0.

Сформулируем выводы.

Пусть $w = w(z)$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$, — функция, регулярная в круге $|z| < 1$ и однолистно отображающая его на выпуклую область,

$$\bar{a}_k = b_{2k-1} - ib_{2k} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} d\mu(t), \; k = 1, 2, \ldots, n-1, \text{—}$$

фиксированные моменты соответствующей функции $\mu(t)$, а K — выпуклая оболочка годографа вектор-функции

$$\eta(t) = \{\cos t, \sin t, \ldots, \cos(n-1)t, \quad \sin(n-1)t\}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Тогда:

1) Если точка $B(b_1, b_2, \ldots, b_{2n-2})$ лежит внутри K, то множеством значений $w'(z_0)$, $|z_0| < 1$, является ограниченная замкнутая область; ее границей служит простой замкнутый контур C, который дается параметрическим уравнением

$$w'(z_0) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_0 e^{-it_j})^{-2\lambda_j}$$

с параметром t_1, $-\pi \leqslant t_1 \leqslant t_0$. Здесь t_0 определено ранее, а λ_1, λ_j, t_j, $j = 2, 3, \ldots, n$, — функции от t_1, образующие при каждом фиксированном t_1 единственное решение системы (2), причем все $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если параметр t_1 пробегает сегмент $-\pi \leqslant t_1 \leqslant \pi$, то точка $w'(z_0)$ описывает контур C в точности n раз.

Если, в частности, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$ (это означает, что $c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$), то решение системы (2) легко угадывается: точки e^{it_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$, расположены в вершинах правильного n-угольника и нагружены равными массами $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. В силу единственности, другого решения нет. В этом случае контур C дается уравнением

$$w'(z_0) = \prod_{k=1}^{n} \left[1 - z_0 e^{-i\left(t + \frac{2\pi}{n} k\right)}\right]^{-\frac{2}{n}}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}.$$

При $n=2$ контуром C является окружность

$$w'(z_0)=\frac{1}{1-z_0^2e^{-2it}},\ -\pi\leqslant t\leqslant 0,$$

а множеством значений $w'(z_0)$ — круг

$$\left|w'(z_0)-\frac{1}{1-|z_0|^4}\right|\leqslant\frac{|z_0|^2}{1-|z_0|^4}.$$

2) Если точка B лежит на границе K, то $w'(z_0)$ принимает лишь одно единственное значение

$$w'(z_0)=\prod_{j=1}^{n}(1-z_0e^{-it_j})^{-2\lambda_j}.$$

Здесь совокупность параметров $t_j,\ \lambda_j,\ \ j=1,2,\ldots,n$, составляет решение системы (2), причем хотя бы одна из величин λ_j аннулируется; все не аннулирующиеся λ_j и им соответствующие t_j (при $-\pi<t_j\leqslant\pi$) определяются из системы (2) однозначно.

3) Если точка B лежит вне K, то множество значений $w'(z_0)$ пусто.

3°. Пусть дана система функционалов

$$f_k(z_k;\mu_k)=\int_a^b g_k(z_k,t)\,d\mu_k(t)=x_{2k-1}[\mu_k]+ix_{2k}[\mu_k],\tag{3}$$

$\mu_k(t)\in M,\ k=1,2,\ldots,n$. Поставим ей в соответствие точку

$$x=\{x_1[\mu_1],x_2[\mu_1],\ldots,x_{2n-1}[\mu_n],x_{2n}[\mu_n]\}.$$

Годограф вектор-функции $\{\xi_{2k-1}(t),\ \xi_{2k}(t)\}$ обозначим через Γ_k, а его выпуклую оболочку через D_k. Если функции $\mu_k(t)\in M$ независимо друг от друга пробегают класс M, то точка x пробегает декартово произведение указанных выпуклых оболочек $D=D_1\times D_2\times\ldots\times D_n$.

Пусть в классе M определен функционал $J[\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n]=\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — вещественная или комплекснозначная функция точки $x\in D$. Из предыдущего вытекает, что двухступенчатые функции $\mu_k(t)\in M$ способны доставить этому функционалу любое допустимое значение, и он превращается в функцию $3n$ независимых вещественных переменных в $3n$-мерном прямоугольном параллелепипеде $[a,b]^{2n}\times[0,1]^n$.

Легко видеть, как изменяются эти утверждения, если система (3) имеет более сложную структуру и состоит из функционалов $f_{k,\nu}(z_{k,\nu};\mu_k)$, в которых $z_{k,\nu}\in G$ — фиксированные точки, а $\nu=1,2,\ldots,s_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Rogosinski, Über positive harmonische Entwicklungen und typischreelle Potenzreihen, Math. Zeitschr. **35**, 1932, 93—121.

2. В. А. Зморович, О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций, УМЖ, т. IV, № 3, 1952.

3. Г. М. Голузин, Об одном методе вариаций в теории аналитических функций, Уч. зап. ЛГУ сер. матем. наук, вып. 23, № 144, 1952, 85—101.

4. И. Я. Ашневиц и Г. В. Улина, Об областях значений аналитических функций, представимых интегралом Стилтьеса, Вестник ЛГУ, серия матем., физ. и хим., вып. 4, № 11, 1955, 31—42.

5. М. П. Ремизова, Об областях значений аналитических функций, представимых суммой и произведением интегралов Стилтьеса, УМЖ, т. XI, № 2, 1959.

6. Ю. Е. Аленицын, Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса, ДАН СССР, **139**, 2, 1961, 263—266.

7. И. А. Александров, Вариационные задачи для звездообразных

однолистных в круге функций, Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, № 4, 1961, 7—19.

8. Ю. Е. Аленицын, Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса, Вестник ЛГУ, серия матем., мех. и астрон., № 7, вып. 2, 1962, 25—41.

9. W. Fenchel, Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven, Math. Ann., Bd. 101, 1929, 238—252.

10. T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Ergebn. der Math., Berlin, 1934.

11. W. Stroganoff, Über den arc $f'(z)$ ..., Труды физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Отд. матем., т. V, 1934, 247—258.

12. C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. del Circ. Mathem. di Palermo, т. XXXII, 1911, 193—217.

13. В. А. Зморович, Про деякі питання теорії унівалентних функцій, Наук. зап. Київськ. Держ. пед. ін-ту, т. VI, фіз.-матем. сер., № 3, 1948.

14. O. Toeplitz, Über die Fourier'sche Entwickelung positiver Funktionen, Rend. del Circ. Mathem. di Palermo, т. XXXII, 1911, 191—192.

Поступила 25.VIII 1961 г.
Киев