О функциях Лебега для некоторых линейных методов приближения на конечном промежутке обыкновенными многочленами

Н. А. Погодичева

Пусть имеется класс непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f(x)$ и ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1, 1]$ система полиномов П. Л. Чебышева

$$T_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}; \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \arccos x \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим полином, интерполирующий данную непрерывную функцию $f(x)$ в узлах полинома Чебышева $x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \, (k = 1, 2, \ldots, n)$,

$$P_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{c}_k T_k(x),$$

где

$$\widetilde{c}_k = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu^{(n)}) \, T_k(x_\nu^{(n)}).$$

Тогда произвольная треугольная матрица чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n+1;$ $\lambda_0^{(n)} = 1;$ $\lambda_{n+1}^{(n)} = 0)$ определит процесс приближения непрерывной функции $f(x)$ алгебраическим многочленом вида

$$\widetilde{V}_n(f; x; \lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \widetilde{c}_k T_k(x).$$

Оказывается, что относительно функции Лебега метода $\widetilde{V}_n(f; x; \lambda)$, т. е. относительно функции $\widetilde{M}_n(x) = \sup\limits_{|f(x)| \leq 1} |\widetilde{V}_n(f; x; \lambda)|$ справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если* $|\lambda_k^{(n)}| \leqslant M$ *и при каждом фиксированном* n *значения* $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n+1;\ \lambda_0^{(n)} = 1;\ \lambda_{n+1}^{(n)} = 0)$ *образуют выпуклую или вогнутую систему чисел, то при* $n \to \infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\widetilde{M}_n(x) = \frac{2}{\pi} |\cos n \arccos x| \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n-k}^{(n)}}{k} \right| + O(1)$$

равномерно относительно всех $x \in [-1, 1]$ *и* n.

Автор благодарит профессора А. Ф. Тимана за внимание к работе.

Поступила 28.XI 1960 г.

Днепропетровск