О построении оболочек голоморфности для областей Гартогса

В. С. Владимиров, М. Ширинбеков

1. Мы будем рассматривать полные области Гартогса вида

$$G = \{(w, z): |w| < R(z), z \in D\},$$

где D — однолистная конечная область в C^n — пространстве n комплексных переменных $z = x + iy = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$,—оболочка голоморфности которой $H(D)$ однолистна. Функция $R(z) \equiv R(x, y)$ должна быть полунепрерывной снизу в D.

Известно (см., например, [1, 2, 3]), что если D — область голоморфности, то оболочка голоморфности области G однолистна и совпадает с ее наименьшей логарифмически плюрисупергармонической оболочкой:

$$H(G) = [(w, z): |w| < e^{-V(z)}, z \in D],$$

где $V(z)$ — наибольшая плюрисубгармоническая миноранта функции $-\ln R(z)$ в области D (см. п. 2). Если же D не есть область голоморфности, то, насколько нам известно, оболочка голоморфности области G не построена. В данной заметке мы решаем эту задачу в предположении, что оболочка голоморфности области D однолистна.

2. Вещественно-значная функция $u(z)$ называется плюрисубгармонической в области $D \subset C^n$, если 1) $u(z)$ — полунепрерывна сверху в D, 2) при любых $z^0 \in D$ и a функция $u(z^0 + \lambda a)$ субгармоническая по λ в сечении D двумерной аналитической плоскостью $z = z^0 + \lambda a$.

Наибольшей плюрисубгармонической минорантой функции $v(z)$ в области D назовем плюрисубгармоническую функцию $v^*(z)$ такую, что

$$1)\ v^*(z) \leqslant v(z), \qquad z \in D,$$

2) для любой плюрисубгармонической в D функции $v_1(z)$ такой, что $v_1(z) \leqslant v(z)$, имеет место неравенство $v_1(z) \leqslant v^*(z), z \in D$. Ясно, что $v^*(z)$ единственна, если она существует. Далее, если $v(z) < +\infty$ — полунепрерывная сверху функция в D, то $v^*(z)$ существует и дается формулой

$$v^*(z) = \overline{\lim_{z' \to z}} \sup v_1(z'),$$

где sup берется по всем плюрисубгармоническим функциям $v_1(z)$, удовлетворяющим неравенству $v_1(z) \leqslant v(z)$ в области D.

3. Лемма 1. *Пусть функция $u(z) < +\infty$ полунепрерывна сверху в области D, оболочка голоморфности которой $H(D)$ — однолистна. Тогда наибольшая плюрисубгармоническая миноранта $v^*(z)$ функции*

$$v(z) = \begin{cases} u(z), & z \in D, \\ +\infty, & z \in H(D) \setminus D \end{cases}$$

в области $H(D)$ существует и дается формулой

$$v^*(z) = \overline{\lim_{z' \to z}} \sup v_1(z'), \tag{1}$$

где sup *берется по всем плюрисубгармоническим функциям $v_1(z)$ в области $H(D)$, удовлетворяющим неравенству*

$$v_1(z) \leqslant u(z), \qquad z \in D.$$

Доказательство. Так как функция $v(z)$ полунепрерывна сверху в $H(D)$, то для доказательства леммы достаточно установить, что функция $v^*(z)$ плюрисубгармоническая в $H(D)$. Для этого нужно только доказать, что множество плюрисубгармонических в D функций $\{v_1(z)\}$, по которым берется sup в (1), равномерно ограничено сверху на всякой подобласти $D' \subset\subset H(D)$. Действительно, так как из $D_\nu \subset D_{\nu+1} \subset\subset D$, $\lim D_\nu = D$ вытекает, что $H(D_\nu) \subset H(D_{\nu+1}) \subset\subset H(D)$, $\lim H(D_\nu) = H(D)$ [4, стр. 274], то, следовательно, для любой подобласти $D' \subset\subset H(D)$ найдется такая подобласть $D'' \subset\subset D$, что $D' \subset H(D'')$. Так как полунепрерывная сверху в D функция $u(z) < +\infty$, то она ограничена сверху на D'', а потому

$$v_1(z) \leqslant u(z) \leqslant C, \qquad z \in D''.$$

Функции $v_1(z)$ плюрисубгармонические в области голоморфности $H(D)$. Следовательно, они являются функциями Гартогса в $H(D)$ (см. [3]). Поэтому они будут таковыми и в любой подобласти $H(D)$, в частности, в D''. Но тогда из неравенства $v_1(z) \leqslant C$ в D'' вытекает, что это неравенство справедливо и в $H(D'')$ (см., Бремерман [3], лемма 5). Замечая, что $H(D'') \supset D'$, выводим отсюда, что $v_1(z) \leqslant C$ в D', что и требовалось доказать.

4. Лемма 2. *Полная область Гартогса*

$$G = [\,(w, z): |\,w\,| < e^{-V(z)},\ z \in D],$$

где D — однолистная область в C^n, тогда, и только тогда, являгтся областью голоморфности, если: 1) *D — область голоморфности и* 2) *функция $V(z)$ плюрисубгармоническая в D.*

Достаточность условий 1) и 2) доказана в работе Бремермана [3]. Необходимость условия 2) вытекает из теории рядов Гартогса (см., например, [1, 2, 4]). Докажем необходимость условия 1). Так как G — область голоморфности, то, как известно [5], функция $-\ln \Delta_G\ (w,\ z)$ — плюрисубгармоническая в G (здесь $\Delta_G\ (w,\ z)$ — расстояние от точки $(w,\ z)$ до границы области G). Функция $-\ln\Delta_G(0,\ z)$ плюрисубгармоническая в D и стремится к $+\infty$ при приближении ко всякой конечной точке границы области D. Поэтому функция $\max[-\ln \Delta_G\ (0,\ z),\ |z|\ ]$ плюрисубгармоническая в области D, стремится к бесконечности всюду на границе D. Это значит, что область D псевдовыпукла и по теореме Ока есть область голоморфности [5]. Лемма доказана.

5. Теорема. *Оболочка голоморфности полной области Гартогса*

$$G = [\,(w,z): |\,w\,| < R\,(z),\ z \in D],$$

где D — однолистная область в C^n, оболочка голоморфности которой $H(D$ также однолистна, есть полная область Гартогса вида

$$\widetilde{G} = [\,(w, z): |\,w\,| < e^{-V^*(z)},\ z \in H\,(D)],$$

где $V^*(z)$ — наибольшая плюрисубгармоническая миноранта в $H(D)$ функции

$$v\,(z) = \begin{cases} -\ln R\,(z), & z \in D, \\ +\infty, & z \in H\,(D) \backslash D. \end{cases}$$

Доказательство. Из лемм 1 и 2 вытекает, что $\widetilde{G}$ есть область голоморфности и $\widetilde{G} \supset G$. Поэтому $H(G) \subset \widetilde{G}$. Осталось, таким образом, доказать, что любая функция $f(w,\ z)$, голоморфная в G, голоморфна в $\widetilde{G}$. Как известно (см., например, [1, 2, 4]), всякую функцию $f(w,\ z)$, голоморфную в полной области Гартогса G, можно разложить в ряд Гартогса

$$f\,(w, z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} w^{\alpha} f_{\alpha}\,(z), \qquad f_{\alpha}\,(z) = \frac{1}{\alpha!}\,\frac{\partial^{\alpha}}{\partial w^{\alpha}}\,f\,(0, z), \tag{2}$$

сходящийся абсолютно и равномерно во всякой подобласти $G^1 \subset\subset G$. Так как оболочка голоморфности $H\ (D)$ предполагается однолистной, то функции $f_{\alpha}(z)$, будучи голоморфными в области D, голоморфны и (однозначны) в $H(D)$. Пусть $z^0 \in H(D)$. Тогда при некотором r $[\,|z - z^0| < r] \subset\subset H(D)$. Докажем, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно в области

$$G_{z^0} = [\,|\,w\,| < \varepsilon] \times [\,|\,z - z^0\,| < r]$$

при некотором $\varepsilon = \varepsilon(z^0)$. Если $z^0 \in D$, то это вытекает из абсолютной и равномерной сходимости ряда (2) в G. Пусть теперь $z^0 \,\overline{\in}\, D$. Так как $H(D_{\nu}) \subset\subset H(D_{\nu+1}) \subset\subset H(D)$, $\lim H(D_{\nu}) = H(D)$, если $D_{\nu} \subset D_{\nu+1} \subset\subset D$, $\lim D_{\nu} = D$, то, следовательно, найдется такая подобласть $D' \subset\subset D$, что будет справедливо включение (см. п. 3)

$$D' \cup [\,|z - z^0| < r] \subset H(D'), \qquad H(D') \subset\subset H(D).$$

Далее, поскольку функция $R(z)$ положительная и полунепрерывна снизу в D, то найдется такое число $m > 0$, что $R(z) > m$ при всех $z \in D'$. А тогда из абсолютной и равномерной сходимости ряда (2) в области G вытекает, что

$$|f_\alpha(z)| \leqslant M\varepsilon^{-\alpha}, \qquad z \in D' \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon = \frac{m}{2}$. Поскольку в $H(D')$ функция $f_\alpha(z)$ принимает те же значения, что и в D', то, следовательно,

$$|f_\alpha(z)| \leqslant M\varepsilon^{-\alpha}, \qquad z \in H(D'), \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Так как, далее, $H(D') \supset [\,|z - z^0| < r]$, то из неравенства (3) вытекает, что ряд (2) сходится абсолютно и равномерно в области $[\,|w| < \varepsilon] \times [\,|z - z^0| < r]$.

Итак, всякая функция $f(w,z)$, голоморфная в G, голоморфна в полной области Гартогса

$$G_1 = [(w,z) : |w| < R_1(z),\ z \in H(D)],$$

где

$$R_1(z) = \begin{cases} R(z), & z \in D, \\ \varepsilon(z), & z \in H(D) \setminus D \end{cases}$$

и $\varepsilon(z)$ — некоторая положительная в $H(D) \setminus D$ функция, не зависящая от f. Функция $R_1(z)$ полунепрерывна снизу в области $H(D)$. Так как $f(w, z)$ голоморфна в G_1, то, следовательно, она голоморфна и в $H(G_1)$. В силу результата, приведенного в п. 1,

$$H(G_1) = [(w, z) : |w| < e^{-V_1(z)},\ z \in H(D)],$$

где $V_1(z)$ — наибольшая плюрисубгармоническая миноранта функции $-\ln R_1(z)$ в области $H(D)$. Но, по построению, $-\ln R_1(z) \leqslant v(z)$, $z \in H(D)$ и поэтому $V_1(z) \leqslant V^*(z)$, $z \in H(D)$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{G} \subset H(G_1)$ и, стало быть, всякая функция $f(w,z)$, голоморфная в G, голоморфна в $\widetilde{G}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen forschreiben, Math. Ann., 62 (1906), 1—88.

2. С. Бохнер и У. Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951.

3. H. J. Bremermann, On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions, Math. Ann., 131, 1956, 76—86.

4. Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, Гостехиздат, М., 1948.

5. H. J. Bremermann, Complex convexity, Trans. Amer. Math. Soc., 82, 1956. 17—51.

Поступила 2.VII 1962 г.
Москва