О движении искусственного спутника Земли относительно центра масс

П. П. Вчерашнюк

Задача о движении искусственного спутника Земли относительно центра масс под действием гравитационного поля сил рассматривалась в работах [1, 2].

В настоящей статье рассматривается движение спутника относительно центра масс под действием сил притяжения Земли. Земля при этом рассматривается как однородный шар, а аэродинамическими силами пренебрегаем.

В первом приближении получены формулы для углов Эйлера, из которых следует результат, содержащийся в [1, 2].

Введем в рассмотрение ортогональный триэдр единичных векторов e_1, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ с началом в центре Земли — фокусе эллиптической орбиты спутника; $\bar{e}_1$ направлен к перигею орбиты, e_2 — в плоскости орбиты параллельно ее малой оси и в сторону движения от перигея к апогею; единичный вектор $\bar{e}_3 = e_1 \times e_2$ имеет направление перпендикуляра к плоскости орбиты. Возмущениями элементов орбиты спутника пренебрегаем; тогда векторы e_1, e_2, e_3 остаются неизменно направленными в пространстве. Ориентацию осей триэдра $Oxyz$ (единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$), связанных со спутником, задаем эйлеровыми углами φ, ψ, θ. В отношении физических характеристик спутника считаем, что $A = B$ и $\frac{C - A}{C} = \varepsilon$ — величина малая. Здесь A, B, C — главные центральные моменты инерции спутника. При этих условиях рассматриваемую здесь задачу будем решать, пользуясь методикой, изложенной в работе [3].

Известно, что гамильтониан данной задачи имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{p_\theta^2}{A} + \frac{(p_\psi - p_\varphi \cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}\right] + \frac{3}{2}n^2\frac{a^3}{r^3}(C - A)\sin^2\theta\sin^2(\psi - \sigma), \tag{1}$$

где n — среднее движение спутника, a — большая полуось орбиты, σ — истинная аномалия

Согласно [3] гамильтониан (1) запишем в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \tag{2}$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{p_\theta^2}{A} + \frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}\right], \tag{3}$$

$$H_1 = b\sin^2\theta\sin^2(\psi - \sigma),$$

$$b = \frac{3}{2}n^2 C\frac{a^3}{r^3}. \tag{4}$$

Уравнение Гамильтона—Остроградского, соответствующее функции H_0 в виде (3) с учетом, что ψ и φ — циклические координаты, будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{(a_\psi - a_\varphi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = 2Ah, \tag{5}$$

где a_ψ, a_φ, h — постоянные. После интегрирования уравнения (5), согласно теореме Якоби — Остроградского, получим:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + b_\theta = \int\frac{A\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\Phi(\cos\theta)}}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_\psi} = b_\psi - \psi = -\int\frac{(a_\psi - a_\varphi\cos\theta)\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\Phi(\cos\theta)}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_\varphi} = b_\varphi - \varphi = -\int\frac{(a_\psi - a_\varphi\cos\theta)\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\Phi(\cos\theta)}}, \tag{8}$$

где

$$\Phi(\cos\theta) = 2Ah\sin^2\theta - (a_\psi - a_\varphi\cos\theta) = a_1 + b_1\cos\theta + c_1\cos^2\theta,$$

$$a_1 = 2Ah - a_\psi^2, \quad b_1 = 2a_\psi a_\varphi, \quad c_1 = -(2Ah + a_\psi^2), \tag{9}$$

$$\Delta = 4a_1c_1 - b_1^2 = -8Ah(2Ah + a_\varphi^2 - a_\psi^2).$$

Вычисляя интегралы (6), (7), (8), получаем

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}\cos\tau - b_1}{2c_1}, \tag{10}$$

$$\psi - b_\psi = \operatorname{arctg}\frac{(a_\psi + a_\varphi)\sqrt{-c_1}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{-c_1 + a_\varphi a_\psi + \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}} + \operatorname{arctg}\frac{(a_\psi + a_\varphi)\sqrt{-c_1}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{-c_1 - a_\varphi a_\psi + \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}}, \tag{11}$$

$$\varphi - b_\varphi = -\operatorname{arc\,tg} \frac{(a_\psi - a_\varphi)\sqrt{-c_1}\,\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{-c_1 - a_\psi a_\varphi + \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{(a_\psi + a_\varphi)\sqrt{-c_1}\,\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{-c_1 + a_\varphi a_\psi - \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}}, \tag{12}$$

где

$$\tau = \frac{\sqrt{-c_1}\,(t + b_\theta)}{A}, \tag{13}$$

b_θ, b_φ, b_ψ — произвольные постоянные.

Принимая во внимание (9) и (13), формулу (10) запишем в виде

$$\cos\theta = N - M\cos G\,(t + b_\theta), \tag{14}$$

где

$$N = \frac{a_\varphi a_\psi}{2Ah + a_\varphi^2}, \quad G = \frac{\sqrt{2Ah + a_\varphi^2}}{A}, \quad M = \frac{\sqrt{2Ah\,(2Ah + a_\varphi^2 - a_\psi^2)}}{2Ah}. \tag{15}$$

Чтобы учесть влияние гравитационной силы на движение спутника, выразим правую часть (4) через h, a_φ, a_ψ, b_θ, b_φ, b_ψ, которые будем считать не постоянными, а функциями времени. При этом заметим, что правая часть равенства (4) содержит две группы периодичностей, а именно по аргументам: σ — периодом обращения спутника по орбите и ψ — периодом прецессии оси спутника.

Для упрощения задачи дальнейшем не будем учитывать ни долгопериодических, ни короткопериодических возмущений. В связи с этим выражение (4) следует усреднить по аргументам σ и ψ. Однако при усреднении по переменной σ следует учесть, что

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{1}{(1 - l^2)^3}\,(1 + l\cos\sigma)^3,$$

где l — эксцентриситет.

Так как эксцентриситеты существующих спутников малы, то дальнейшие вычисления проводятся нами для круговой орбиты ($l = 0$). После усреднения выражение (4) примет вид

$$H_1 = \frac{1}{2}\,b\sin^2\theta. \tag{16}$$

Подставляя (14) в (16), получаем

$$H_1 = \frac{b}{2}\,(1 - N^2 + 2NM\cos\tau - M^2\cos^2\tau). \tag{17}$$

Система дифференциальных уравнений для определения новых переменных h, a_φ, a_ψ, b_θ, b_φ, b_ψ с учетом (15) и (17) после усреднения по явно входящему времени примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{db_\theta}{dt} &= \frac{\varepsilon b}{2}\,\frac{A\,[2Ah\,(a_\psi^2 + a_\varphi^2) + a_\varphi^2\,(a_\varphi^2 - 5a_\psi^2)]}{(2Ah + a_\varphi^2)^3}, & \frac{dh}{dt} &= 0,\\
\frac{db_\psi}{dt} &= \frac{\varepsilon b}{2}\,\frac{2a_\psi\,(a_\varphi^2 - Ah)}{(2Ah + a_\varphi^2)^2}, & \frac{da_\psi}{dt} &= 0,\\
\frac{db_\varphi}{dt} &= \frac{\varepsilon b}{2}\,\frac{2a_\varphi\,[a_\psi^2\,(4Ah - a_\varphi^2) - Ah\,(2Ah + a_\varphi^2)]}{(2Ah + a_\varphi^2)^3}, & \frac{da_\varphi}{dt} &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (18) и подставляя вместо ε и b их значения, получаем: $h = \mathrm{const}$, $a_\psi = \mathrm{const}$, $a_\varphi = \mathrm{const}$,

$$
\begin{aligned}
b_\theta &= \frac{3n^2}{4}(C-A)\frac{A\,[2Ah\,(a_\psi^2 + a_\varphi^2) + a_\varphi^2\,(a_\varphi^2 - 5a_\psi^2)]}{(2Ah + a_\varphi^2)^3}\,t + b'_\theta, \\
b_\psi &= \frac{3n^2}{2}(C-A)\,\frac{a_\psi\,(a_\varphi^2 - Ah)}{(2Ah + a_\varphi^2)^2}\,t + b'_\psi, \\
b_\varphi &= \frac{3n^2}{2}(C-A)\frac{a_\varphi\,[a_\psi^2\,(4Ah - a_\varphi^2) - Ah\,(2Ah + a_\varphi^2)]}{(2Ah + a_\varphi^2)^3}\,t + b'_\varphi,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где b'_θ, b'_φ, b'_ψ — новые произвольные постоянные. Подставляя затем найденные выражения для h, a_φ, a_ψ, b_θ, b_φ, b_ψ в (10) — (12), получаем выражения для углов Эйлера в первом приближении:

$$
\cos\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}\cos\tau - b_1}{2c_1}, \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{(a_\psi + a_\varphi)\sqrt{-c_1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2}}{-c_1 + a_\varphi a_\psi - \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}} &+ \operatorname{arc\,tg}\frac{(a_\psi - a_\varphi)\sqrt{-c_1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2}}{-c_1 - a_\varphi a_\psi + \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}} + \\
&+ \frac{3n^2}{2}(C-A)\,\frac{a_\psi\,(a_\varphi^2 - Ah)}{(2Ah + a_\psi^2)^2}\,t + b'_\psi,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi = -\operatorname{arc\,tg}\frac{(a_\psi - a_\varphi)\sqrt{-c_1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2}}{-c_1 - a_\psi a_\varphi + \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}} &+ \operatorname{arc\,tg}\frac{(a_\psi + a_\varphi)\sqrt{-c_1}\,\mathrm{tg}\,\frac{\tau}{2}}{-c_1 + a_\psi a_\varphi - \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}} + \\
&+ \frac{3n^2}{2}(C-A)\,\frac{a_\varphi\,[a_\psi^2\,(4Ah - a_\varphi^2) - Ah\,(2Ah + a_\psi^2)]}{(2Ah + a_\psi^2)^3}\,t + b'_\varphi,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

где

$$
\tau = \frac{\sqrt{-c_1}}{A}\left\{1 + \frac{3n^2}{4}(C-A)\frac{A\,[2Ah\,(a_\psi^2 + a_\varphi^2) + a_\varphi^2\,(a_\varphi^2 - 5a_\psi^2)]}{(2Ah + a_\varphi^2)^3}\right\}t + \frac{\sqrt{-c_1}}{A}b'_\theta. \tag{23}
$$

Если вектор $\vec{e}_3$ направить вдоль вектора кинетического момента, то легко показать, что в этом случае (сохраняя прежние обозначения для углов Эйлера) формулы (20) — (22) примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\theta &= \theta_0, \\
\psi &= \left(\frac{a_\psi}{A} - \frac{3n^2}{2}\,\frac{C-A}{cr_0}\cos^3\theta_0\right)t + \gamma, \\
\varphi &= \frac{3n^2}{4}\,\frac{C-A}{cr_0}\,(3 - 5\cos^2\theta_0)\cos^2\theta_0 t + \beta,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где γ и β — произвольные постоянные, r_0 — постоянная угловая скорость собственного вращения спутника.

Из формул (24) имеем:

$$\dot{\psi} = \frac{a_\psi}{A} - \frac{3n^2}{2}\frac{C-A}{cr_0}\cos^3\theta_0,$$
$$\dot{\varphi} = \frac{3n^2}{4}\frac{C-A}{cr_0}(3-5\cos^2\theta_0)\cos^2\theta_0. \tag{25}$$

Для этого случая в работе [2] показано, что вектор $\vec{K}$ имеет постоянную величину и вращается с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{3n^2}{4}\frac{C-A}{cr_0}\cos\theta_0(1-3\cos^2\theta_0)\cos\theta_1. \tag{26}$$

где θ_1 — угол между вектором $\vec{K}$ и перпендикуляром к плоскости орбиты спутника, вокруг направления перпендикулярного к той же плоскости.

Формулы (25) и (26) показывают, что искусственный спутник Земли совершает регулярную прецессию вокруг прецессирующего с угловой скоростью Ω вектора $\vec{K}$, сохраняющего постоянную величину. Следовательно, в рассматриваемом случае вращение искусственного спутника Земли около центра масс представляет возмущенную регулярную прецессию. Эффект возмущения регулярной прецессии, как видно из тех же формул, объясняется несферичностью($A \neq C$) эллипсоида инерции искусственного спутника Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Белецкий, Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс, Сб. «Искусственные спутники Земли», № 1, Изд-во АН СССР, 1958.
2. А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, М., 1961.
3. П. П. Вчерашнюк, К вопросу об интегрировании канонических уравнений методом усреднения, Тр. конференции аспирантов и сотрудников Ин-та матем. АН УССР, Изд-во Ин-та матем. АН УССР, К., 1963.

Поступила 10. I 1963 г.
Киев