О приближенном решении нелинейных операторных уравнений методом Ю. Д. Соколова

Н. С. Курпель

Пусть дано нелинейное операторное уравнение

$$u = Tu, \tag{1}$$

в котором T — нелинейный оператор, действующий в некотором полном гильбертовом пространстве H, u — искомый элемент пространства H.

Если для любых $u, v \in H$ оператор T удовлетворяет условию Липшица

$$\| Tu - Tv \| \leqslant q_T \| u - v \| \tag{2}$$

с константой Липшица $q_T < 1$, то, как известно, уравнение (1) имеет единственное решение $u \in H$, которое может быть получено по методу последовательных приближений.

В настоящей работе рассматривается приближенное решение уравнения (1) методом Ю. Д. Соколова [1—5], устанавливаются некоторые новые для нелинейного случая достаточные условия сходимости процесса последовательных приближений и даются соответствующие оценки погрешности n-го приближения. В заключение приводится пример, иллюстрирующий эффективность метода.

Идея метода Ю. Д. Соколова заключается в том, что, исходя из некоторого начального приближения $u_0 \in H$, строим последовательные приближения на основе формул

$$u_n = T(u_{n-1} + \alpha_n), \tag{3}$$

где

$$\alpha_n = P\delta_n, \qquad \delta_n = u_n - u_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

P — оператор ортогонального проектирования пространства H на его подпространство H_P конечной или бесконечной размерности.

При этом на основе (3) — (4) для определения получается уравнение

$$\alpha_n = PT(u_{n-1} + \alpha_n) - Pu_{n-1}, \tag{5}$$

которое обычно решается проще исходного.

Относительно сходимости процесса последовательных приближений (3)—(4) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если в пространстве H оператор T удовлетворяет условию* (2) *с константой $q_T < 1$, то последовательные приближения $\{u_n\}$, определяемые формулами* (3)—(4), *сходятся к единственному решению $u^* \in H$ уравнения* (1) *при любом $u_0 \in H$ и справедливы следующие оценки погрешности n-го приближения:*

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \frac{q_T}{\sqrt{1 - q_{PT}^2}} \frac{1}{1 - \varepsilon} \| Q\delta_n \|, \tag{6}$$

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \frac{q_T}{\sqrt{1 - q_{PT}^2}} \frac{\varepsilon^{n-1}}{1 - \varepsilon} \| Q\delta_1 \|. \tag{7}$$

Здесь $Q = I - P$ (I — тождественный оператор в пространстве H), $\varepsilon = \min\left\{\frac{q_{QT}}{\sqrt{1 - q_{PT}^2}}, q_T\right\}$, q_{PT} и q_{QT} — константы Липшица операторов соответственно PT и QT в пространстве H.

Доказательство. Заметим прежде всего, что при условии $q_T < 1$ уравнение (5) имеет единственное решение $\alpha_n \in H_P$ при любом $u_0 \in H$, так как справедливо неравенство $q_{PT} \leqslant q_T$. Дальше, используя (4), можно представить (3) в виде

$$u_n = T(Qu_{n-1} + Pu_n). \tag{8}$$

В силу того, что элементы Q_z и P_v ортогональны при любых z, $v \in H$, получаем на основе условия Липшица

$$\| \delta_n \|^2 \leqslant q_T^2 (\| Q\delta_{n-1} \|^2 + \| P\delta_n \|^2), \tag{9}$$

$$\| Q\delta_n \|^2 \leqslant q_{QT}^2 (\| Q\delta_{n-1} \|^2 + \| P\delta_n \|^2), \tag{10}$$

$$\| P\delta_n \|^2 \leqslant q_{PT}^2 (\| Q\delta_{n-1} \|^2 + \| P\delta_n \|^2). \tag{11}$$

Из последнего неравенства имеем

$$\| P\delta_n \|^2 \leqslant \frac{q_{PT}^2}{1 - q_{PT}^2} \| Q\delta_{n-1} \|.^{\,2} \tag{12}$$

Подставляя эту оценку в (10), получаем

$$\| Q\delta_n \| \leqslant \frac{q_{QT}}{\sqrt{1-q_{PT}^2}} \| Q\delta_{n-1} \|. \tag{13}$$

Затем, подставляя (12) в (9), находим $\| \delta_n \| \leqslant \frac{q_T}{\sqrt{1-q_{PT}^2}} \| Q\delta_{n-1} \|$. Далее, так как справедливо равенство

$$\| \delta_n \|^2 = \| Q\delta_n \|^2 + \| P\delta_n \|^2,$$

то из (9) находим

$$\| Q\delta_n \|^2 \leqslant q_T^2 \| Q\delta_{n-1} \|^2 - (1-q_T^2) \| P\delta_n \|^2;$$

отсюда

$$\| Q\delta_n \| \leqslant q_T \| Q\delta_{n-1} \|. \tag{14}$$

Сравнивая (13) и (14), получаем $\| Q\delta_n \| \leqslant \varepsilon \| Q\delta_{n-1} \|$. Следовательно, так как $\varepsilon < 1$, то

$$\| u_{n+p} - u_n \| \leqslant \| \delta_{n+p} \| + \ldots + \| \delta_{n+1} \| \leqslant \frac{q_T}{\sqrt{1-q_{PT}^2}} (\varepsilon^{p-1} + \ldots + 1) \| Q\delta_n \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q_T}{\sqrt{1-q_{PT}^2}} \frac{1}{1-\varepsilon} \| Q\delta_n \| \leqslant \frac{q_T}{\sqrt{1-q_{PT}^2}} \frac{\varepsilon^{n-1}}{1-\varepsilon} \| Q\delta_1 \|. \tag{15}$$

Таким образом, при условии $\varepsilon < 1$ последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна, поэтому, в силу полноты пространства, H сходится к некоторому пределу, который, как нетрудно убедиться, и представляет собой единственное в H решение уравнения (1).

Переходя в (15) к пределу при $p \to \infty$, получаем оценки погрешности (6) — (7).

Теорема 2. *Пусть условие* (2) *с константой* $q_T < 1$ *выполняется в некоторой замкнутой области* R *пространства* H. *Если, кроме того, для произвольных* $u, v, \in R$ *выполнены условия*

$$\begin{gathered} S_0 v \equiv Qu_0 + PTv \in R, \\ Sv \equiv QTu + PTv \in R, \end{gathered} \tag{16}$$

то последовательные приближения $\{u_n\}$, *определяемые формулами* (3)—(4), *сходятся к единственному в* R *решению* u^* *уравнения* (1) *и справедливы оценки погрешности* (6)—(7).

Доказательство. Действительно, при указанных условиях операторы S_0 и S в области R удовлетворяют условиям принципа сжатых отображений, поэтому уравнение (5) при любом $n = 1, 2, \ldots$ имеет единственное решение $\alpha_n \in H_P$ такое, что $u_{n-1} + \alpha_n \in R$. Следовательно, рассуждения теоремы 1 применимы и в этом случае, но с тем отличием, что здесь вместо всего пространства H рассматривается область R.

Следствие 1. Если в некотором шаре $R(\| u \| \leqslant \varrho)$ выполнены условия

$$\begin{gathered} \| Qu_0 + PT\theta \| \leqslant \varrho (1 - q_{PT}), \\ \| T\theta \| \leqslant \varrho (1 - \sqrt{q_{PT}^2 + q_{QT}^2}), \\ q_T < 1 \end{gathered} \tag{17}$$

где q_T, q_{QT}, q_{PT} — константы Липшица операторов T и PT в шаре R, θ — нулевой элемент пространства H, то справедливо утверждение теоремы 2.

Доказательство. Действительно, в силу (17) для любых $u, v \in R$ имеем

$$\|S_0 v\| = \|Qu_0 + PTv\| \leqslant \|Qu_0 + PT\theta\| + \|PTv - PT\theta\| \leqslant \|Qu_0 + PT\theta\| + q_{PT}\varrho \leqslant \varrho,$$

$$\|Sv\| \leqslant \|QTu - QT\theta + PTv - PT\theta\| + \|T\theta\| \leqslant \sqrt{q_{QT}^2 + q_{PT}^2}\,\varrho + \|T\theta\| \leqslant \varrho,$$

т. е. операторы S_0 и S переводят шар R в себя.

Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 2.

Часто полезно определить, хотя бы грубо, значение радиуса шара, для которого можно гарантировать сходимость процесса (3)—(4). В этом случае можно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть в некотором шаре $R(\|u\| \leqslant M)$, где M — пока неизвестное положительное число, известны оценки*

$$\|QTu\| \leqslant F_{QT}(M), \tag{18}$$

$$\|PTu\| \leqslant F_{PT}(M), \tag{19}$$

$$q_T \leqslant q_T(M), \tag{20}$$

где $F_{QT}(M)$, $F_{PT}(M)$ и $q_T(M)$ — некоторые положительные функции аргумента M.

Если при этом система неравенств

$$\begin{gathered} \|Qu_0\|^2 + F_{PT}^2(M) \leqslant M^2, \\ F_{QT}^2(M) + F_{PT}^2(M) \leqslant M^2, \\ q_T(M) < 1 \end{gathered} \tag{21}$$

имеет положительное решение, то процесс последовательных приближений (3)—(4) сходится к единственному в R решению уравнения (1) и справедливы оценки погрешности (6)—(7).

Доказательство. В силу первых двух неравенств (21) для любых $u, v \in R$ имеем соответственно

$$\|Qu_0 + PTv\|^2 = \|Qu_0\|^2 + \|PTv\|^2 \leqslant \|Qu_0\|^2 + F_{PT}^2(M) \leqslant M^2,$$

$$\|QTu + PTv\|^2 = \|QTu\|^2 + \|PTv\|^2 \leqslant F_{QT}^2(M) + F_{PT}^2(M) \leqslant M^2,$$

т. е. операторы S_0 и S переводят шар R в себя. Учитывая еще последнее из неравенств (21), замечаем, что удовлетворяются условия теоремы 2.

Следствие 2. Если в шаре R известны оценки

$$\begin{gathered} q_{QT} \leqslant q_{QT}(M), \\ q_{PT} \leqslant q_{PT}(M), \end{gathered} \tag{22}$$

где $q_{QT}(M)$ и $q_{PT}(M)$ — положительные функции M, то радиус шара R, в котором можно гарантировать сходимость процесса (3) — (4), можно определить из неравенств

$$\begin{gathered} \|Qu_0 + T\theta\| \leqslant M[1 - q_{PT}(M)], \\ \|T\theta\| \leqslant M\left[1 - \sqrt{q_{PT}^2(M) + q_{QT}^2(M)}\right], \\ q_T(M) < 1. \end{gathered} \tag{23}$$

З а м е ч а н и е 1. Если оператор T выражается формулой

$$Tu \equiv f + T_1 u,$$

где T_1 — нелинейный оператор в пространстве H, f — известный элемент пространства H, и для оператора T_1 известны оценки, аналогичные оценкам (18)—(19), то M можно определить из системы неравенств

$$\begin{gathered} \| Pf + Qu_0 \| + F_{PT_1}(M) \leqslant M, \\ \| f \| + \sqrt{F^2_{QT_1}(M) + F^2_{PT_1}(M)} \leqslant M, \\ q_{T_1}(M) < 1. \end{gathered} \tag{24}$$

З а м е ч а н и е 2. Первому из условий в системах (17), (21), (23) и (24) всегда можно удовлетворить, если выполнены остальные. Это можно сделать за счет выбора начального приближения u_0. Например, можно взять $u_0 \equiv \theta$ или $u_0 \equiv T\theta$.

П р и м е р. Рассмотрим в пространстве L_2 простейшее нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{1}{5} x + \frac{5}{6} x^2 + \int_0^1 x(x\xi - 1) u^2(\xi)\, d\xi, \tag{25}$$

имеющее очевидное решение $u(x) = x^2$.

В данном примере

$$f \equiv \frac{1}{5} x + \frac{5}{6} x^2; \quad T_1 u \equiv \int_0^1 x(x\xi - 1) u^2(\xi)\, d\xi.$$

Возьмем в качестве оператора P оператор, определяемый формулой

$$Pu \equiv \int_0^1 3x\xi u(\xi)\, d\xi. \tag{26}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, можно установить следующие оценки:

$$F_{PT_1}(M) = \sqrt{\frac{7}{48}} M^2,$$

$$F_{QT_1}(M) = \sqrt{\frac{1}{240}} M^2,$$

$$q_T(M) = \sqrt{\frac{3}{5}} M.$$

Так как

$$\| f \| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{5} x + \frac{5}{6} x^2 \right)^2 dx} = \frac{\sqrt{53}}{15},$$

то система (24) имеет вид ($u_0 \equiv f$)

$$\frac{\sqrt{53}}{15} + \sqrt{\frac{3}{20}} M^2 \leqslant M,$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} M < 1,$$

отсюда $0{,}648 < M < 1{,}291$.

Взяв $M = 0{,}648$, имеем $q_T < 0{,}503$; $q_{PT} < 0{,}495$; $q_{QT} < 0{,}084$ и $\varepsilon < 0{,}097$.

Применяя к уравнению (25) алгорифм (3) — (4) при $u_0 = T\theta = f$ и P, определенным согласно (26), получаем в первом приближении

$$u_1(x) = 0{,}00390\, x + 0{,}99459\, x^2$$

и погрешность

$$u^*(x) - u_1(x) = -\,0{,}00390\, x + 0{,}00541\, x^2.$$

Абсолютная погрешность по норме L_2:

$$\| u^*(x) - u_1(x) \| \approx 0{,}0006.$$

Решая уравнение (25) обычным методом последовательных приближений (исходя из того же начального приближения), находим

$$\eta_1(x) = -\,0{,}03556\, x + 1{,}02574\, x^2$$

и погрешность

$$u^*(x) - \eta_1(x) = 0{,}03556\, x - 0{,}02574\, x^2.$$

Абсолютная погрешность по норме L_2

$$\| u^*(x) - \eta_1(x) \| \approx 0{,}0122.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Соколов, О применении метода осреднения функциональных поправок к нелинейным интегральным уравнениям, УМЖ, т. IX, № 4, 1957.
2. Ю. Д. Соколов, Об одном методе приближенного решения нелинейных интегральных уравнений с переменными пределами, УМЖ, т. X, № 4, 1958.
3. Э. А. Чернышенко, Исследование сходимости и установление оценки погрешности метода усреднения в полном нормированном пространстве, УМЖ, т. VI, № 3, 1954.
4. Э. А. Чернышенко, О некоторых методах приближенного решения операторных уравнений, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук, Изд-во АН УССР, К., 1955.
5. А. Ю. Лучка, О теории и применениях метода осреднения функциональных поправок, Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук, Изд-во АН УССР, К., 1961.

Поступила 10. IX 1962 г.
Киев