

## Построение потенциального потока газа с учетом его сжимаемости вокруг крылевого профиля при помощи электро моделирования

*Г. С. Липовой*

Существующие аналитические методы расчета параметров потока газа вокруг профиля крыла произвольной формы чрезвычайно громоздки, поэтому во многих случаях практически неприменимы. Метод электро моделирования позволяет легко находить параметры потока несжимаемой жидкости. Цель данной работы состоит в том, чтобы установить метод расчета потока газа, используя результаты электро моделирования потока несжимаемой жидкости.

При построении потока газа будем исходить из формулы Кармана—Тзяна, являющейся результатом развития известного метода С. А. Чаплыгина (см. [2]). Эта формула устанавливает соответствие между плоскостью потока несжимаемой жидкости  $t$  и плоскостью газа  $z$  и имеет вид

$$dz = dt - \lambda \left( \frac{dG}{dt} \right)^2 dt, \quad (1)$$

где  $G$  — характеристическая функция,  $\lambda = \frac{M_\infty^2}{(1 + \sqrt{1 - M_\infty^2})^2}$  — постоянная, зависящая от числа Маха невозмущенного потока.

Эта формула имеет место при бесциркуляционном обтекании. Случай циркуляционного обтекания сводится к бесциркуляционному заменой в формуле (1)  $dt$  на  $h(t)dt$ , после чего получим известную формулу Лина [2, 6]

$$dz = h(t) dt - \lambda \left( \frac{dG}{dt} \right)^2 \frac{dt}{h(t)}. \quad (2)$$

Для функции  $h(t)$  справедливо разложение

$$h(t) = 1 + \frac{i\gamma}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \dots + \frac{A_n}{t^n}, \quad (3)$$

где коэффициент  $\gamma$  зависит от циркуляции  $\Gamma$ , скорости невозмущенного потока  $W_\infty$  и числа  $\lambda$ . Остальные коэффициенты считаем не зависящими от  $\lambda$ . Чтобы удовлетворялось условие замкнутости профиля, должно выполняться равенство

$$\gamma = \frac{\lambda \Gamma}{(1 + \lambda) \pi W_\infty}. \quad (4)$$

Считаем, что профиль в плоскости  $t$  — круг радиуса  $r$ , а в плоскости  $z$  задан некоторый крыловой профиль  $C$ . При  $\lambda = 0$  поток в плоскости  $z$  будет несжимаемым. Обозначим для этого случая  $z$  через  $Z$ . Тогда из формул (2) и (3) получим

$$\frac{dZ}{dt} = h(t) = 1 + \frac{A_2}{t^2} + \dots + \frac{A_n}{t^n}. \quad (5)$$

Отсюда видно, что функция  $h(t)$  представляет собой производную от некоторой функции  $Z(t)$ , имеющей разложение

$$Z(t) = t + \frac{B_1}{t} + \frac{B_2}{t^2} + \dots + \frac{B_n}{t^n}. \quad (6)$$

Функция  $Z(t)$  конформно отображает внешность круга радиуса  $r$  в плоскости  $t$  на внешность заданного профиля  $C$ .

Предположим далее, что известна функция, конформно отображающая внешность круга в плоскости  $t$  на внешность профиля  $C$  в плоскости  $Z$ . Будем считать при этом, что центр круга совпадает с началом координат, а скорости обоих потоков на бесконечности равны по величине (для простоты положим их равными единице) и совпадают по направлению с положительным направлением оси абсцисс. Тогда разложение этой функции будет иметь вид (6), а разложение ее производной — (5). Следовательно, при  $\lambda = 0$  в качестве функции  $h(t)$  можно всегда принять производную отображающей функции. Отсюда нетрудно получить функцию  $h(t)$  и для случая  $\lambda \neq 0$ , прибавляя к разложению (5) член

$$\frac{i\gamma}{t} = \frac{i\lambda\Gamma}{(1 + \lambda) \pi W_\infty} \frac{1}{t}. \quad (7)$$

Обозначим разложение, получающееся из (5) прибавлением члена (7), через

$$\frac{dZ^*}{dt} = 1 + \frac{i\lambda\Gamma}{(1 + \lambda) \pi W_\infty} \frac{1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \dots + \frac{A_n}{t^n}. \quad (8)$$

Принтегрировав выражение (8), получим функцию

$$Z^* = t + \frac{i\lambda\Gamma}{(1+\lambda)\pi W_\infty} \ln t + \frac{B_2}{t} + \dots + \frac{B_{n+1}}{t^n}, \quad (9)$$

отображающую внешность круга в плоскости  $t$  на внешность некоторого профиля в плоскости  $Z^*$ . Как видно из формулы (9), этот профиль будет незамкнутым.

Рассмотрим соответствие между скоростями в плоскостях  $z$ ,  $Z$ ,  $Z^*$  и  $t$ , которые обозначим соответственно через  $q = we^{i\varphi}$ ,  $Q = We^{i\alpha}$ ,  $Q^* = W^*e^{i\alpha^*}$ ,  $Q_t = W_t e^{i\beta}$ . Так как циркуляционный поток в плоскости  $Z$  свелся к бесциркуляционному в плоскости  $Z^*$ , то скорости в соответствующих точках профилей в плоскостях  $z$  и  $Z^*$  будут совпадать по направлению и их модули будут связаны формулой (см. [2], стр. 240)

$$\omega = \frac{W^*}{1 - \lambda W^{*2}} = \frac{W}{|h| - \frac{\lambda W^2}{|h|}}. \quad (10)$$

Скорости  $Q$ ,  $Q^*$  и  $Q_t$  связаны формулами  $Q = Q_t \left( \frac{dt}{dZ} \right)$ ,  $Q^* = Q_t \left( \frac{dt}{dZ^*} \right)$

и, так как  $\left( \frac{dt}{dZ} \right)_\infty = \left( \frac{dt}{dZ^*} \right)_\infty = \frac{1}{h_\infty} = 1$ , то  $Q_\infty = Q^*_\infty = Q_{t\infty} = 1$ .

Построим теперь профиль в плоскости  $Z^*$ , соответствующий заданному профилю  $C$ , и найдем распределение скоростей на нем, используя какой-нибудь из существующих методов, например метод электро моделирования. Тогда, воспользовавшись тем, что касательные в плоскостях  $z$  и  $Z^*$  совпадают по направлению, и преобразовав формулу (10) к виду

$$|dz| = (1 - \lambda W^{*2}) |dZ|, \quad (11)$$

сможем построить профиль в плоскости газа, распределение скоростей на котором найдем по той же формуле (10).

Методику электро моделирования удобнее рассматривать на конкретных примерах.

**Пример 1.** Рассмотрим симметричный двояковыпуклый профиль  $C$ , заданный в плоскости  $Z$ . Из условия  $\left( \frac{dZ}{dt} \right)_\infty = 1$  определим радиус круга

в плоскости  $t$ , используя метод Матвеева (см. [4], стр. 101—103). Осью бесциркуляционного обтекания является ось симметрии. Поэтому, вырезав прямоугольный лист электропроводной бумаги, сделаем в центре его вырез в форме профиля с осью симметрии, направленной параллельно потоку. Решение задачи начнем с построения эквипотенциальных линий, то есть со случая аналогии  $A$ . Найдя значения потенциалов  $U_A$  и  $U_B$  в критических точках  $A$  и  $B$ , которыми являются точки пересечения профиля с осью симметрии, определим радиус круга по формуле

$$r = \frac{L U_A - U_B}{4 U_1 - U_2}, \quad (12)$$

где  $L$  — длина модели,  $U_1 - U_2$  — разность потенциалов на шинах.

Далее необходимо установить соответствие между точками профиля и круга при обтекании их потоком с одинаковой циркуляцией. Для этого промоделируем циркуляционное обтекание профиля, воспользовавшись одной из существующих методик (см. [2, 5]). Нами была использована методика [5]. Строим линии тока, выполняя аналогию  $B$ , и делаем разрез.

В аналогии  $A$  на берегах разреза задаем такой скачок потенциала  $\Delta U^*$ , чтобы острое стало точкой разветвления эквипотенциалей. Замеряя значения потенциала в различных точках профиля, найдем распределение приведенного потенциала на нем по формуле

$$\Phi_i = \frac{U_a - U_i}{U_a - U^*}, \quad (13)$$

где  $U^* = U_b$  для верхней части профиля,  $U^* = U_b - \Delta U^*$  для нижней.

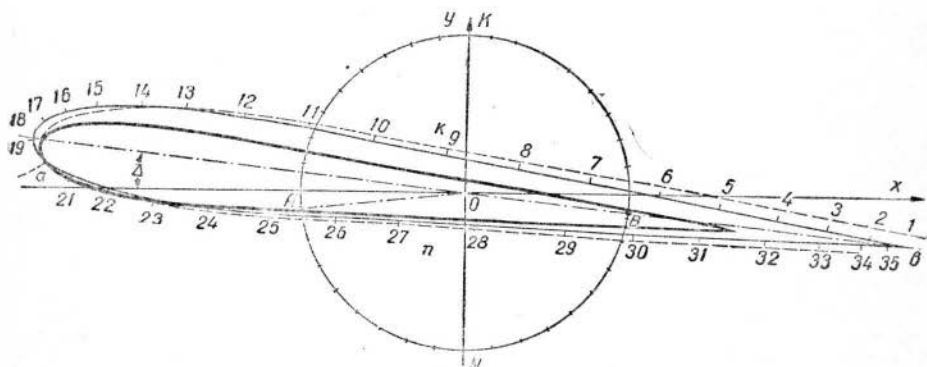


Рис. 1.

Распределение приведенного потенциала на круге находим по формуле

$$\Phi_i = \frac{(\cos \theta_A - \theta_A \sin \Delta) - (\cos \theta_i - \theta_i \sin \Delta)}{(\cos \theta_A - \theta_A \sin \Delta) - (\cos \theta_B - \theta_B \sin \Delta)}, \quad (14)$$

где  $\Delta$  — угол атаки.

Дуга круга  $AQB$  (рис. 1) отображается в дугу профиля  $akb$ , поэтому в соответствующих точках этих дуг приведенные потенциалы должны иметь одинаковое значение. То же выполняется и для дуг  $ANB$ ,  $anb$ . Замерив значения потенциалов  $U_a$  и  $U_b$  в критических точках  $a$ ,  $b$ , вычислив  $\Phi_i$  по формуле (13) и приравняв  $\psi_i$  и  $\Phi_i$ , получим

$$U_i = U_a - \Phi_i(U_a - U^*). \quad (15)$$

Задавая точку на круге ее приведенным потенциалом  $\Phi_i$ , по формуле (14) находим значение потенциала для соответствующей точки модели, после чего при помощи измерения найдем и саму точку. Для повышения точности следует выполнить несколько моделей и результаты усреднить. Если соответствие точек установлено, то значение производной отображающей функции можно приближенно найти из отношения  $Z'(t) = \frac{dZ}{dt} = \frac{\Delta Z}{\Delta t}$ .

Тогда для точки  $t$  — середины участка  $\Delta t$  — можно положить при  $\lambda = 0$   $h(t) = \frac{\Delta Z}{\Delta t}$ . Отсюда можно найти значение  $h(t)$  и при  $\lambda \neq 0$ , принимая

$$h(t) = \frac{\Delta Z^*}{\Delta t} = \frac{\Delta Z}{\Delta t} + \frac{i\gamma}{t}. \quad (16)$$

Координаты точки  $t$  для каждого  $\Delta t$  можно записать в виде  $t = re^{i(\beta - \frac{\pi}{2})}$ . Так как  $\Gamma = 4\pi r \sin \Delta$ , то формулу (16) можно привести к виду

$$|\Delta Z^*| e^{i\alpha} = |\Delta Z| e^{i\alpha} + \frac{i\lambda 4\pi r \sin \Delta}{(1 + \lambda) \pi r e^{i(\beta - \frac{\pi}{2})}} |\Delta t| e^{i\beta} =$$

$$= (|\Delta Z| \cos \alpha - C |\Delta t|) + i |\Delta Z| \sin \alpha, \quad (17)$$

$$C = \frac{4\lambda \sin \Delta}{1 + \lambda}.$$

где

$$C = \frac{4\lambda \sin \Delta}{1 + \lambda}.$$

Разобьем окружность в плоскости  $t$  на такое количество равных участков, чтобы каждый отрезок дуги можно было при заданной точности заменить стягивающей его хордой, и найдем на профиле в плоскости  $Z$  точки, соответствующие точкам разбиения на круге, как это было сделано выше. Если соответствующие отрезки на профиле окажутся слишком искривленными, то число точек деления следует увеличить.

Считая, что направление оси  $OX$  совпадает с направлением потока, расположим заданный профиль в плоскости  $Z$  (рис. 1) так, чтобы его ось симметрии образовала с осью  $OX$  угол  $(\pi - \Delta)$ , и по формуле (17) построим профиль в плоскости  $Z^*$ . При этом в качестве направления отрезков  $\Delta Z e^{i\alpha}$  берется направление, соответствующее обходу профиля против часовой стрелки. Если профиль в плоскости  $Z^*$  построен, то профиль в плоскости газа  $z$  легко строится по формуле (11), которую запишем в виде

$$|\Delta z| = (1 - \lambda W_i^*) |\Delta Z_i^*|; \quad (18)$$

при этом направление каждого отрезка  $\Delta z_i$  совпадает с направлением соответствующего ему отрезка  $\Delta Z_i^*$ . Распределение скоростей  $W_i^*$  на профиле в плоскости  $Z^*$  ищем следующим образом. Сначала находим скорость для средней точки каждого отрезка  $\Delta t$  на круге по формуле  $W_{t_i} = 2(\sin \theta_i - \sin \Delta)$ . Затем для каждой пары отрезков  $\Delta t$  и  $\Delta Z^*$  находим

отношение  $\left| \frac{\Delta t}{\Delta Z^*} \right|$ , тогда

$$W_i^* = W_{t_i} \left| \frac{\Delta t_i}{\Delta Z_i^*} \right|.$$

По формуле  $w = \frac{W^*}{1 - \lambda W^{*2}}$  находим распределение скоростей на профиле в плоскости  $z$ , чем полностью решаем поставленную задачу. На рис. 1 изображен (утолщенной линией) профиль, полученный данным методом из исходного симметричного профиля для числа Маха  $M_\infty = 0.7$  и угла атаки  $\Delta = 8^\circ$ . Пунктиром изображен вспомогательный профиль в плоскости  $Z^*$ . Размеры модели были взяты  $1300 \times 750$  мм, длина хорды профиля 300 мм.

Заметим, что построение удобнее всего начинать с передней критической точки. Критерием точности является совпадение концов верхней и нижней дуг, образующих острие.

**П р и м е р 2.** Рассмотрим случай несимметричного профиля, причем будем решать для этого профиля прямую задачу, то есть искать на нем распределение скоростей. Если профиль тонкий, то, найдя распределение скоростей и давлений в несжимаемом потоке, по известным формулам можно пересчитать их на поток газа. Для толстых же профилей необходимо проводить построение, рассмотренное в предыдущем примере, при этом за исходный нужно брать некоторый профиль, отличный от заданного. При моделировании несимметричного профиля сначала нужно найти направление его бесциркуляционного обтекания. Для этого наклеим профиль, выполненный из латуниной фольги, на модель из электропроводной бумаги так, чтобы направление потока совпадало с предполагаемым направлением бесциркуляционного обтекания. Подключим шины параллельно потоку и проверим, является ли острие точкой схода струи. Если нет, тогда, срезая края модели под некоторым углом, то есть изменяя на-

правление потока, добиваемся того, чтобы острое стало точкой схода. Затем находим переднюю критическую точку и далее проводим построение так, как и в первом примере для симметричного профиля. Построив профиль в плоскости газа  $z$ , видим, каким образом нужно деформировать за-

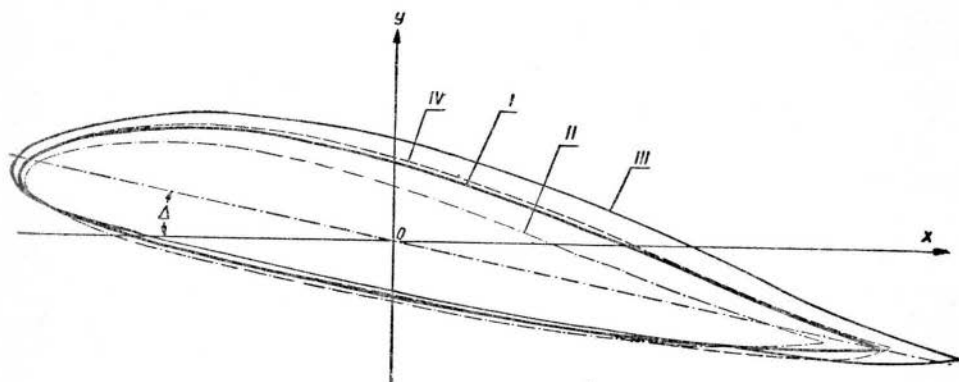


Рис. 2.

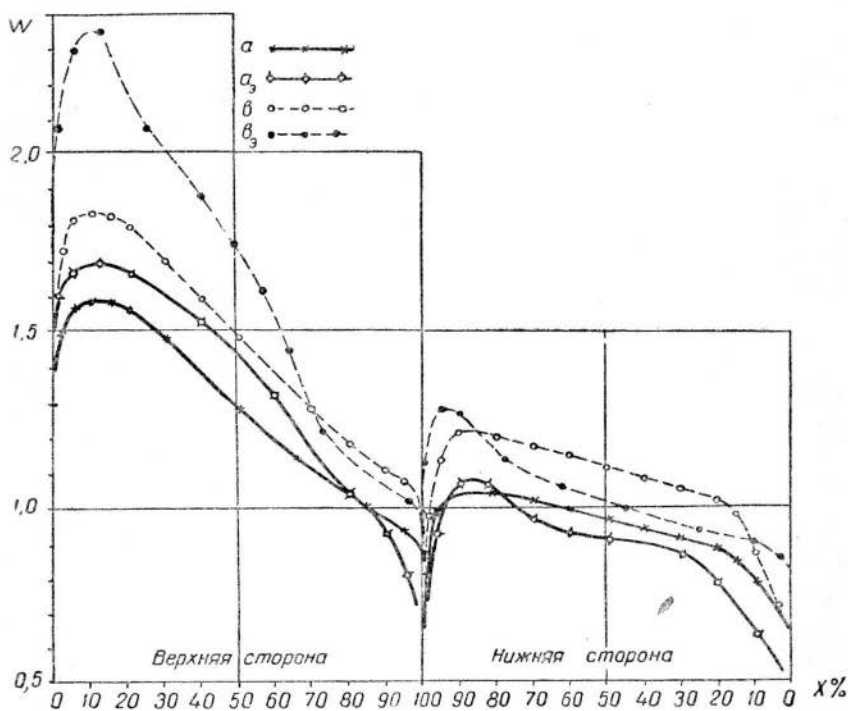


Рис. 3.

данный профиль, чтобы, приняв его за исходный, получить в результате построения заданный. На рис. 2 изображается: I — заданный профиль ЦАГИ В-16%; II — профиль, полученный из заданного построением; III — деформированный профиль, точки которого удалены от профиля I на такое же расстояние, как и точки профиля II, но в противоположную сторону; IV — профиль, полученный из III построением. Следовательно, взяв профиль III за исходный, мы решим задачу обтекания потоком газа для профиля IV, близкого к заданному. Беря еще одно-два приближе-

ния, можно достичь полного совпадения профилей I и IV. На рис. 3 изображены эпюры распределения относительной скорости по заданному профилю ЦАГИ В-16% при угле атаки  $12^\circ$ :  $a$  — экспериментальное распределение скорости, полученное пересчетом из эпюры коэффициента давлений (см. [1]);  $a_3$  — для несжимаемой жидкости, полученное из графика  $a$  по формуле

$$v_{\text{сж}} = \frac{v_{\text{нс}}}{\sqrt{1-M^2}}; b_3 — \text{полученное вышеизложенным методом. Как из-}$$

вестно, формула пересчета дает заниженные результаты на участках максимума скорости, что наблюдается и на рис. 3. Данный метод получается из объединения метода Кармана — Тзяна и метода электрoмоделирования, которые оба в достаточной степени апробированы. Поэтому полученные значения будут близкими к действительным. Однако при моделировании на электропроводной бумаге погрешность при нахождении скорости может достигать 15%. Если же моделировать на алюминиевой фольге по методике, разработанной Г. А. Рязановым [3], то погрешность можно уменьшить до 2—4%. Поэтому для точных расчетов следует применять методу [3] с последующим пересчетом на сжимаемость, как это было сделано выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев, Изд-во ЦАГИ, М., 1940.
2. Е. Кар а ф о л и, Аэродинамика больших скоростей, Изд-во АН СССР, М., 1960.
3. Г. А. Рязанов, Моделирование методом сплошных сред с применением вихревого электрического поля, Доклады Четвертой межвузовской конференции по применению физического и математического моделирования в различных отраслях техники, сб. № 1, Матем. моделиров. полей, Изд-во МЭИ, М., 1962.
4. Н. Н. Сунцов, Методы аналогии в аэрогидродинамике, Физматгиз, М., 1958.
5. П. Ф. Фильчаков, В. И. Панчишин, Интеграторы ЭГДА, Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге, Изд-во АН УССР, К., 1961.
6. С. С. L i n, On an extension of the von Karman—Tsien method, Quart. j. of appl. Math., 4, 1946.

Поступила 10. X 1962 г.

Киев