К вопросу о периодических решениях дифференциальных уравнений с недифференцируемыми правыми частями

А. М. Самойленко

Вопрос о существовании, единственности и устойчивости периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x),$$

правые части которых не дифференцируемы, но ограничены и удовлетворяют условию Липшица, рассматривался Ю. А. Митропольским [1]. При указанных выше предположениях автором [1] была доказана теорема существования периодических решений в окрестности положений равновесия усредненной системы.

В настоящей работе доказывается аналогичная теорема при менее жестких, чем у Ю. А. Митропольского, ограничениях.

Итак, будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{1}$$

где x, X — точки n-мерного евклидова пространства E_n, t — время, ε — малый положительный параметр.

Пусть для системы (1) выполняются следующие условия

а) Функция $X(t, x)$ является непрерывной периодической по t с периодом 2π.

б) Система усредненных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \overline{X}(\xi), \tag{2}$$

где

$$\overline{X}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(t, \xi)\,dt, \tag{3}$$

имеет изолированное статическое решение $\xi = \xi_0$.

в) Существуют постоянная M, неубывающая функция $\psi(\delta)$, $\lim_{\delta\to 0}\psi(\delta) = 0$, и некоторая выпуклая ϱ-окрестность U_ϱ ($U_\varrho \in E_n$) решения $\xi = \xi_0$ такие, что функция $X(t, x)$ удовлетворяет неравенствам

$$|X(t, x)| \leqslant M, \tag{4}$$

$$|X(t, x') - X(t, x'')| \leqslant \psi(|x' - x''|) \tag{5}$$

для x, x', $x'' \in U_\varrho$, $t \in [0, 2\pi]$.

Покажем, что при некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на $\overline{X}(x)$, система уравнений (1) имеет периодическое решение $x = x(t)$ с периодом 2π.

Для этого сделаем в (1) замену переменных

$$x = \xi_0 + h \tag{6}$$

и перейдем к системе уравнений

$$\frac{dh}{dt} = \varepsilon \overline{X}(\xi_0 + h) + \varepsilon Z(t, \xi_0 + h), \tag{7}$$

где обозначено

$$Z(t, x) = X(t, x) - \overline{X}(x). \tag{8}$$

По системе (7) запишем систему интегральных уравнений:

$$h(t) = h(0) + \varepsilon \int_0^t \overline{X}(\xi_0 + h(t))\,dt + \varepsilon \int_0^t Z(t,\ \xi_0 + h(t))\,dt. \tag{9}$$

Пусть функция $\overline{X}(x)$ непрерывно дифференцируема для $x \in U_\varrho$. Тогда для решений $h(t)$ системы (9), принадлежащих ϱ-окрестности U_ϱ^0 нуля $h = 0$, имеет место

$$\int_0^t \overline{X}(\xi_0 + h(t))\,dt = t\overline{X}(\xi_0 + h(t)) - \varepsilon \int_0^t t\,\frac{\partial \overline{X}(\xi_0 + h(t))}{\partial x} X(t,\ \xi_0 + h(t))\,dt \tag{10}$$

В силу (10) систему (9) можно записать таким образом:

$$h(t) = h(0) + \varepsilon t\overline{X}(\xi_0 + h(t)) -$$

$$- \varepsilon^2 \int_0^t t\,\frac{\partial \overline{X}(\xi_0 + h(t))}{\partial x}\, X(t,\ \xi_0 + h(t))\,dt + \varepsilon \int_0^t Z(t,\ \xi_0 + h(t))\,dt; \tag{11}$$

отсюда, потребовав периодичности решения $h(t)$ с периодом 2π, т. е. потребовав выполнимости условий

$$h(2\pi) = h(0), \tag{12}$$

получаем

$$\varepsilon 2\pi \overline{X}(\xi_0 + h(0)) - \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}(\xi_0 + h(t))}{\partial x} X(t,\ \xi_0 + h(t))\,t\,dt +$$

$$+ \varepsilon \int_0^{2\pi} Z(t,\ \xi_0 + h(t))\,dt = 0. \tag{13}$$

Пусть

$$\det \left| \frac{\partial \overline{X}(x)}{\partial x} \right| \neq 0 \tag{14}$$

для $x \in U_\varrho$. Тогда из уравнения (13), записанного в виде

$$\frac{\partial \overline{X}(\xi_0 + \widetilde{h})}{\partial x} h(0) = \frac{1}{2\pi} \left[\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}(\xi_0 + h(t))}{\partial x} X(t,\ \xi_0 + h(t))\,t\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} Z(t,\ \xi_0 + h(t))\,dt \right], \tag{15}$$

где $\widetilde{h}$ — некоторая постоянная, $\widetilde{h} \in [0,\ h(0)]$, следует

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial \overline{X}(\xi_0 + \widetilde{h})}{\partial x} \right]^{-1} \cdot \left[\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial \overline{X}(\xi_0 + h(t))}{\partial x} \cdot X(t,\ \xi_0 + h(t))\,t\,dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} Z(t,\ \xi_0 + h(t))\,dt \right]; \tag{16}$$

или, подставляя $h(t)$ из (9) в последнее слагаемое (16), получаем

$$h(0)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}(\xi_0+\widetilde{h})}{\partial x}\right]^{-1}\cdot\left\{\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}(\xi_0+h(t))}{\partial x}X(t,\ \xi_0+\right.$$

$$\left.+h(t))\,t\,dt-\int_0^{2\pi}Z\left[t,\ \xi_0+h(0)+\varepsilon\int_0^t X(t,\ \xi_0+h(t))dt\right]dt\right\}. \qquad (17)$$

Подставив (17) в (9), получим следующую систему уравнений для определения $h(t)$, удовлетворяющих условию (12):

$$h(t)=\varepsilon\int_0^t X(t,\ \xi_0+h(t))\,dt+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}(\xi_0+\widetilde{h})}{\partial x}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{\varepsilon\int_0^{2\pi}t\,\frac{\partial\overline{X}(\xi_0+h(t))}{\partial x}X(t,\ \xi_0+h(t))\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi}Z\left[t,\ \xi_0+h(0)+\varepsilon\int_0^{2\pi}X(t,\ \xi_0+h(t))dt\right]dt\right\}. \qquad (18)$$

Пусть существуют постоянная M_1 и неубывающая функция $\psi_1(\delta)$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\psi_1(\delta)=0$, такие, что

$$\left|\frac{\partial\overline{X}(x)}{\partial x}\right|\leqslant M_1, \qquad (19)$$

$$\left|\frac{\partial\overline{X}(x')}{\partial x}-\frac{\partial\overline{X}(x'')}{\partial x}\right|\leqslant\psi_1(|x'-x''|) \qquad (20)$$

для $x,\ x',\ x''\in U_\varrho$.

Покажем, что при сделанных выше предположениях уравнение (18) для $t\in[0,\ 2\pi]$ имеет решение в некоторой ϱ_1-окрестности $U^0_{\varrho_1}$ $(\varrho_1\leqslant\varrho)$ нуля $h=0$.

Действительно, пусть T — шар непрерывных на сегменте $[0,\ 2\pi]$ функций

$$|\varphi(t)|\leqslant\varrho_1. \qquad (21)$$

Определим на T оператор U, задав его равенством

$$U_t\varphi=\varepsilon\int_0^t X(t,\ \xi_0+\varphi(t))\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\overline{X}(\xi_0+\widetilde{\varphi})}{\partial x}\right]^{-1}\times\left\{\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial\overline{X}(\xi_0+\varphi(t))}{\partial x}X(t,\ \xi_0+\varphi(t))\,t\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi}Z\left[t,\ \xi_0+\varphi(0)+\varepsilon\int_0^t X(t,\ \xi_0+\varphi(t))\ dt\right]dt\right\}. \qquad (22)$$

Проверим, что оператор $U_t\varphi$ — вполне непрерывный в пространстве непрерывных функций. Имеем:

1) оператор $U_t\varphi$ переводит шар T в компактную часть его, что следует из неравенства

$$|U_t\varphi| \leqslant \varepsilon \int_0^{2\pi} \left| X(t,\ \xi_0+\varphi(t)) \right| dt + \frac{1}{2\pi} \left| \left[\frac{\partial \overline{X}(\xi_0+\widetilde{\varphi})}{\partial x} \right]^{-1} \times \right.$$

$$\times \left\{ \varepsilon \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \overline{X}(\xi_0+\varphi(t))}{\partial x} \right| \left| X(t,\ \xi_0+\varphi(t)) \right| t\, dt + \left| \int_0^{2\pi} Z \left[t,\ \xi_0+\varphi(0)+ \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \varepsilon \int_0^t X(t,\ \xi_0+\varphi(t)) dt \right] dt \right| \right\} \leqslant \varepsilon 2\pi M + \varepsilon M_2 2\pi M M_1 + 2M_2\psi(\varepsilon 2\pi M) < \varrho_1 \tag{23}$$

при достаточно малых ε и из равностепенной непрерывности функции $U_t\varphi$;

2) оператор $U_t\varphi$ непрерывен, что следует из неравенства

$$\| U_t\varphi_n - U_t\varphi \| \leqslant \varepsilon \int_0^{2\pi} | X(t,\ \xi_0+\varphi_n(t)) - X(t,\ \xi_0+\varphi(t)) | dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left| \left[\frac{\partial \overline{X}(\xi_0+\widetilde{\varphi}_n)}{\partial x} \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \left\{ \varepsilon \frac{\partial \overline{X}(\xi_0+\varphi_n(t))}{\partial x} X(t,\ \xi_0+\varphi_n(t))t - Z \right[t, \right.$$

$$\left. \left. \xi_0+\varphi_n(0)+\varepsilon \int_0^t X(t,\ \xi_0+\varphi_n(t)) dt \right] \right\} dt \, | \leqslant \psi(\|\varphi_n-\varphi\|)\, \varepsilon 2\pi +$$

$$+ \psi_1(\|\widetilde{\varphi}_n-\varphi\|)(2\pi\varepsilon M M_1 + 2M) + \psi_1(\|\varphi_n-\varphi\|)\, \varepsilon 2\pi M M_2 +$$

$$+ \psi(\|\varphi_n-\varphi\|)\, \varepsilon 2\pi M_1 M_2 + 2M_2\psi\{\|\varphi_n(0)-\varphi(0)\| + \varepsilon 2\pi\psi(\|\varphi_n-\varphi\|)\}$$

при

$$\|\varphi_n-\varphi\| = \max_{t\in[0,\ 2\pi]} |\varphi_n(t)-\varphi(t)|_{n\to\infty} \to 0.$$

Но условия 1) и 2) означают, что оператор $U_t\varphi$ вполне непрерывный в пространстве непрерывных функций и, следовательно, в силу теоремы Шаудера [2] имеет неподвижную точку в шаре T. Это равноценно тому, что исходное уравнение (1) имеет в ϱ_1-окрестности U_{ϱ_1} точки $x=\xi_0$ периодическое с периодом 2π решение. Поэтому доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) выполнены условия а), б), в) функции $\overline{X}(x)$ непрерывно дифференцируемы для $x\in U_\varrho$; существуют постоянная M_1 и неубывающая функция $\psi_1(\delta)$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\psi_1(\delta)=0$, такие, что*

$$\left| \frac{\partial \overline{X}(x)}{\partial x} \right| \leqslant M_1; \quad \left| \frac{\partial \overline{X}(x')}{\partial x} - \frac{\partial \overline{X}(x'')}{\partial x} \right| < \psi_1(|x'-x''|)$$

для $x,\ x',\ x''\in U_\varrho$;

$$\det\left| \frac{\partial \overline{X}(x)}{\partial x} \right| \neq 0, \quad x\in U_\varrho.$$

Тогда найдется такая ϱ_1-окрестность U_{ϱ_1} ($\varrho_1 \leqslant \varrho$) решения $\xi = \xi_0$ и такое ε_0, $\varepsilon_0 > 0$, что для любого ε, меньшего ε_0 в ϱ_1-окрестности U_{ϱ_1} точки $x = \xi_0$ существует периодическое решение $x = x(t)$ системы (1) периода 2π, $|x(t) - \xi_0| \leqslant \varrho_1$, $\varrho_1 \to 0$ при $\varepsilon_0 \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, О периодических решениях систем нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых не дифференцируемы, УМЖ, т. XI, № 4, 1959.
2. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Mathem., Bd. II, 1930.

Поступила 21. I 1963 г.
Киев