К вопросу о построении решений для нелинейных систем, находящихся под воздействием внешних периодических сил, зависящих явно от времени

Н. Е. Столярская

1. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, для которой дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1.1}$$

где ε — малый параметр, $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ —функция, периодическая по отношению к νt с периодом 2π, достаточное число раз дифференцируемая по x, $\dot{x}$.

Цель настоящей работы состоит в построении приближенных решений для случая неавтономной системы вида (1.1). Схема построения асимптотических приближений аналогична схеме А. И. Лурье [2] для автономной системы, однако способ определения величин u_i, B_i, C_i отличен.

Рассматривается нерезонансный случай. С помощью линейного неособого преобразования уравнение (1.1) можно привести к системе двух уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + \varepsilon X(\nu t, x, y), \\ \dot{y} &= \omega y + \varepsilon Y(\nu t, x, y). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Переходя к комплексным величинам

$$x + iy = z, \qquad Z = X + iY,$$

можем записать систему (1.2) в виде

$$\dot{z} = i\omega z + \varepsilon Z(\nu t, z, \bar{z}), \qquad \dot{\bar{z}} = -i\omega\bar{z} + \varepsilon\bar{Z}(\nu t, z, \bar{z}), \tag{1.2a}$$

где

$$Z = -\frac{i}{\omega} f\left(\nu t, \frac{z+\bar{z}}{2}, -\omega\frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

Решение z будем искать в виде

$$z = ae^{i\psi} + \varepsilon u_1(a, \psi, \nu t) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, \nu t) + \dots, \tag{1.3}$$

где $u_i(a, \psi, \nu t)$ — комплексные функции, имеющие период 2π по обеим угловым переменным νt, ψ; a, ψ — медленно изменяющиеся функции времени, определяемые из уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots \tag{1.4}$$

Итак, задача построения приближенных решений уравнения **(1.1)** сводится к задаче нахождения функций u_i, A, B_1, B_2, ..., C_1, ... и т. д.

Составляем дифференциальные уравнения, служащие для определения функций $u_i(a, \psi, \nu t)$. Дифференцируя (1.3) по t, получаем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial z}{\partial(\nu t)}\nu.$$

Принимая во внимание **(1.4)**, находим

$$\dot{z} = \left(e^{i\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial a} + \ldots\right)\varepsilon A(a) + \left(iae^{i\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi} + \ldots\right) \times$$

$$\times (\omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots) + \varepsilon\nu\frac{\partial u_1}{\partial(\nu t)} + \ldots \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в уравнение (1.2а), получаем

$$\left(e^{i\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a} + \ldots\right)\varepsilon A(a) + \left(iae^{i\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi} + \ldots\right) \times$$

$$\times (\omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots) + \varepsilon\nu\frac{\partial u_1}{\partial(\nu t)} + \varepsilon^2\nu\frac{\partial u_2}{\partial(\nu t)} + \ldots = \tag{1.6}$$

$$= i\omega a e^{i\psi} + \varepsilon i\omega u_1(a, \psi, \nu t) + \varepsilon^2 i\omega u_1(a, \psi, \nu t) + \ldots + \varepsilon Z(\nu t, z, \bar{z}).$$

Представим Z в виде

$$Z = Z_0 + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 \Delta z + \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\right)_0 \Delta\bar{z}\right] + \ldots,$$

где

$$\varepsilon\Delta z = \varepsilon(u_1 + \varepsilon u_2 + \ldots),$$

$$Z_0 = Z(\nu t, ae^{i\psi}, ae^{-i\psi}).$$

Заменяя теперь в уравнении (1.6) $Z(\nu t, z, \bar{z})$ его разложением, получаем

$$\left(e^{i\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial a} + \ldots\right)\varepsilon A(a) + \left(iae^{i\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\psi} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\psi} + \ldots\right) \times$$

$$\times (\omega + \varepsilon B_1(a) + \ldots) + \varepsilon\nu\frac{\partial u_1}{\partial(\nu t)} + \varepsilon^2\nu\frac{\partial u_2}{\partial(\nu t)} + \ldots = \tag{1.7}$$

$$= i\omega(ae^{i\psi} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots) + \varepsilon Z_0 + \varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 u_1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\right)\bar{u}_1\right] + \ldots$$

Приравнивая в **(1.7)** коэффициенты при первых степенях ε, получаем

$$\omega\frac{\partial u_1}{\partial\psi} = -\left[A(a) + iaB_1(a)\right]e^{i\psi} + i\omega u_1 - \nu\frac{\partial u_1}{\partial(\nu t)} + Z_0$$

Уравнение первого приближения будет иметь вид

$$\omega \frac{\partial}{\partial \psi}(u_1 e^{-i\psi}) = -[A(a) + iaB_1(a)] + Z_0 e^{-i\psi} - \nu \frac{\partial u_1}{\partial(\nu t)} e^{-i\psi}. \quad (1.8)$$

Аналогично, приравнивая коэффициенты при ε^2, находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial a} A(a) + iae^{i\psi} B_2(a) + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} B_1(a) + \frac{\partial u_2}{\partial \psi}\omega + \frac{\partial u_2}{\partial t} =$$

$$= i\omega u_2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 u_1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\right)_0 \bar{u}_1, \quad (1.9)$$

отсюда

$$\omega \frac{\partial}{\partial \psi}(e^{-i\psi} u_2) - iaB_2 - \left[A\frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \psi}\right] e^{-i\psi} +$$

$$+ \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right) u_1 e^{-i\psi} + \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\right) \bar{u}_1 e^{-i\psi} - \nu \frac{\partial u_2}{\partial(\nu t)} e^{-i\psi}.$$

Аналогично, уравнение m-го приближения будет иметь вид

$$\omega \frac{\partial}{\partial \psi}(u_m e^{-i\psi}) = -aiB_m - \left[A\frac{\partial u_{m-1}}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_{m-1}}{\partial \psi}\right] e^{-i\psi} +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0 u_{m-1} + \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}}\right)_0 \bar{u}_{m-1}\right] e^{-i\psi} + U_m e^{-i\psi} - \nu \frac{\partial u_m}{\partial(\nu t)} e^{-i\psi}, \quad (1.10)$$

где U_m — зависит от приближений u_k, z_k до порядка $(m-2)$. Для определения $A(a)$, $B_1(a)$ и $u_1(\nu t, a, \psi)$ прежде всего представим $Z_0(\nu t, ae^{i\psi}, ae^{-i\psi})$ в виде двойной суммы Фурье

$$\nu t = \theta,$$

$$Z_0(\nu t, z, \bar{z}) = \sum_n^N \sum_m^M \alpha_{nm}^{(0)} e^{i(n\nu t + m\psi)},$$

$$\alpha_{nm}^{(0)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_0(\theta, ae^{i\psi}, ae^{-i\psi}) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\psi\, d\theta. \quad (1.11)$$

Представим $u_1(a, \psi, \nu t)$ в виде

$$u_1 = \sum_n^N \sum_m^M \beta_{nm}(a) e^{i(n\theta + m\psi)} + C_1(a) e^{i\psi} \quad (1.12)$$

или в форме

$$u_1 = u_{10} + C_1(a) e^{i\psi}. \quad (1.13)$$

Предполагаем, что $C_1(a)$ — действительная величина. Подставляя в уравнение первого приближения (1.8) выражение (1.13), получаем

$$\sum_n^N \sum_m^M (m\omega + n\nu - \omega) i\beta_{nm}(a) e^{i(n\nu t + m\psi)} =$$

$$= -[A(a) + iaB_1(a)] e^{i\psi} + \sum_n^N \sum_m^M \alpha_{nm}^{(0)} e^{i(n\nu t + m\psi)}. \quad (1.14)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в (1.14), имеем

$$(m\omega + n\nu - \omega) i\beta_{nm}(a) = \alpha_{nm}^{(0)};$$

отсюда следует, что

$$\beta_{nm}(a)=\frac{\alpha_{nm}^{(0)}}{(m\omega+n\nu-\omega)\,i} \tag{1.15}$$

для всех n, m, удовлетворяющих неравенству

$$m\omega+n\nu-\omega\neq 0$$

или, так как рассматривается нерезонансный случай, $n\neq 0$, $m\neq 1$ одновременно.

Подставляя найденное выражение $\beta_{nm}(a)$ в (1.12), получаем

$$u_1(a,\,\psi,\,\nu t)=\sum_n^N\sum_m^M\frac{e^{i(n\theta+m\psi)}}{(m\omega+n\nu-\omega)\,i}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_0e^{-i(n\theta+m\psi)}\,d\psi\,d\theta+C_1(a)\,e^{i\psi}. \tag{1.16}$$

Исходя из уравнения (1.8) и учитывая, что $u_1(a,\,\psi,\,\nu t)$ — функция периодическая по ψ и νt с периодом 2π, получаем

$$A(a)+iaB_1(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_0e^{-i\psi}\,d\psi\,d\theta. \tag{1.17}$$

Из этого уравнения, выделяя действительную и мнимую части, получаем значения величин $A(a)$ и $B_1(a)$.

Для построения второго приближения вычисляем вначале $u_{10}(a,\,\psi,\,\nu t)$ по формуле (1.16), а затем, используя условия периодичности u_2 по ψ и νt, получаем для определения $C_1(a)$ и $B_2(a)$ уравнения (1.20) и (1.21).

Итак, подставляя в уравнение (1.9) выражение (1.13) и учитывая, что u_2 — периодическая функция по νt и ψ с периодом 2π, получаем:

$$iaB_2=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0u_{10}+\left(\frac{\partial Z}{\partial\bar z}\right)_0\bar u_{10}\right]e^{-i\psi}d\psi\,d\theta+\frac{C_1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0e^{i\psi}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Z}{\partial\bar z}\right)_0e^{-i\psi}\right]e^{-i\psi}d\psi d\theta-A\frac{dC_1}{da}-iB_1C_1-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[A\frac{\partial u_{10}}{\partial a}+B_1\frac{\partial u_{10}}{\partial\psi}\right]e^{-i\psi}d\psi d\theta.$$

Последнее слагаемое в этом выражении равно нулю, так как u_{10} по условию не содержит первой гармоники; однако в u_1 первая гармоника входит.

Следовательно,

$$iaB_2(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\,d\psi\,d\theta+\frac{C_1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial Z_0}{\partial a}e^{-i\psi}d\psi\,d\theta-$$

$$-A\frac{dC_1}{da}-iB_1C_1(a), \tag{1.18}$$

так как

$$\frac{\partial Z_0}{\partial a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0e^{i\psi}+\left(\frac{\partial Z}{\partial\bar z}\right)_0e^{-i\psi},\qquad \Phi=\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0u_{10}+\left(\frac{\partial Z}{\partial\bar z}\right)_0u_{10}\right]e^{-i\psi}.$$

Дифференцируя выражение (1.17) по a и подставляя в (1.18), получаем

$$\frac{dC_1}{da}A-C_1\frac{dA}{da}+i\left(aB_2-C_1a\frac{dB_1}{da}\right)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\,d\psi\,d\theta. \tag{1.19}$$

Отделяя в (1 19) действительную и мнимые части, имеем

$$\frac{dC_1}{da}A(a)-\frac{dA}{da}C_1(a)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\,d\psi\,d\theta, \tag{1.20}$$

$$aB_2(a)=C_1(a)\,a\frac{dB_1}{da}+\mathrm{Im}\,\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi\,d\psi\,d\theta. \tag{1.21}$$

Постоянную интегрирования уравнения (1.20) найдем из условия обращения $C_1(a)$ в нуль пр.і $a=a_0$, где a_0 не является корнем уравнения $A(a)=0$.

Последующие приближения строятся аналогично.

Пример Рассмотрим обобщенное уравнение Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y-\varepsilon(1-y^2)\frac{dy}{dt}=E\sin\nu t.$$

Это уравнение путем замены $y=x+U\sin\nu t$, где $U=\frac{E}{1-\nu^2}$, приводится к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\varepsilon[1-(x+U\sin\nu t)^2]\left(\frac{dx}{dt}+U\nu\cos\nu t\right).$$

Переходя к системе двух уравнений, а затем к комплексной форме, получаем

$$\dot z=iz+i\varepsilon[1-x^2-2Ux\sin\nu t-U^2\sin^2\nu t](y-U\nu\cos\nu t),$$

$$Z=i(y-x^2y-2Uxy\sin\nu t-U^2y\sin^2\nu t-U\nu\cos\nu t+$$
$$+U\nu x^2\cos\nu t+2U^2\nu x\sin\nu t\cos\nu t+U^3\nu\sin^2\nu t\cos\nu t).$$

Выражая x и y через z, $\bar z$, получаем следующие выражения для Z:

$$Z=\frac{1}{8}\{4z-4\bar z-(z+\bar z)^2(z-\bar z)-4(z^2-\bar z^2)\sin\nu t-4U^2(z-\bar z)\sin^2\nu t-$$
$$-8iU\nu\cos\nu t+2U\nu i(z+\bar z)^2\cos\nu t+8iU^2\nu(z+\bar z)\sin\nu t\cos\nu t+$$
$$+8iU^3\nu\sin^2\nu t\cos\nu t\}.$$

Таким образом, после нахождения величины Z можно вычислить Z_0:

$$Z_0=i\Big\{a\sin\psi-\frac{1}{4}a^3\sin\psi-U^2a\sin^2\nu t\sin\psi+2U^2\nu a\sin\nu t\times$$
$$\times\cos\nu t\cos\psi+\frac{1}{2}U\nu a^2\cos\nu t\cos 2\psi-Ua^2\sin\nu t\sin 2\psi-\frac{1}{4}a^3\sin 3\psi-$$
$$-U\nu\cos\nu t-\frac{1}{2}U\nu a^2\cos\nu t+U^3\nu\sin^2\nu t\cos\nu t\Big\}.$$

Используя условие (1.15), находим величины B_1 и A:

$$B_1(a)=0,$$

$$A(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(a\sin^2\psi-\frac{1}{4}a^3\sin^2\psi-U^2a\sin^2\nu t\sin^2\psi+$$

$$+ 2U^2 \nu a \sin \nu t \cos \psi \sin \psi \cos \nu t + \frac{1}{2} U \nu a^2 \cos \nu t \cos 2\psi \sin \psi -$$

$$- U a^2 \sin \nu t \sin \psi \sin 2\psi - \frac{1}{4} a^3 \sin 3\psi \sin \psi - U \nu \cos \nu t \sin \psi +$$

$$+ \frac{1}{2} U \nu a^3 \cos \nu t \sin \psi + U^3 \nu \sin^2 \nu t \cos \nu t \sin \psi \Big) d\psi\, dt.$$

Следовательно, для первого приближения

$$z = ae^{i\psi},$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} - \frac{U^2}{2} \right),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 1.$$

Вычислим второе приближение. Для этого найдем величину $u_{10}(a, \psi, \nu t)$ по формуле (1.19). Так как $n. \ m = 0, \pm 2, 1, 3$, то вычислив соответствующие $\alpha_{nm}^{(0)}$ и подставив их значения в формулу (1.13), находим, что

$$u_1(a, \psi, \nu t) = - \frac{a^3}{16} \sin 3\psi - \frac{U\nu (4 - 2a^2 - U^2)}{8(1 - \nu)} \cos \nu t +$$

$$+ \frac{U^3 \nu}{8(1 - 3\nu)} \cos 3\nu t + \frac{U a^2 (2 + \nu)}{8(\nu + 1)} \cos (\nu t + 2\psi) +$$

$$+ \frac{U a^2 (2 - \nu)}{8(3 - \nu)} \cos (\nu t - 2\psi) + \frac{U^2 a (2\nu - 1)}{8\nu} \sin (2\nu t + \psi) +$$

$$+ \frac{U^2 a (1 - 2\nu)}{8\nu} \sin (2\nu t - \psi) + i \left\{ \frac{a^3}{16} \cos 3\psi + \frac{U\nu (4 - 2a^2 - U^2)}{8(1 - \nu)} \sin \nu t + \right.$$

$$+ \frac{U^3 \nu}{8(1 - 3\nu)} \sin 3\nu t + \frac{U a^2 (2 - \nu)}{8(\nu + 1)} \sin (\nu t + 2\psi) + \frac{U a^2 (2 - \nu)}{8(3 - \nu)} \sin (\nu t - 2\psi) -$$

$$\left. - \frac{U^2 a (2\nu - 1)}{8\nu} \cos (2\nu t + \psi) - \frac{U^2 a (1 - 2\nu)}{16\nu} \cos (2\nu t - \psi) + C_1 e^{i\psi} \right\}.$$

Вычисляя по формуле (1.20) $C_1(a)$, находим, что

$$B_2(a) = \frac{1}{16} \left\{ \frac{a^4}{8} - \frac{U^2 a^2 (2 - \nu)}{3 - \nu} - \frac{U^2 a^2 (2 + \nu)}{2(\nu + 1)} + U^2 a^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 U^2 \nu}{2} - 2U^4 \nu - \frac{3}{4} U^4 - \frac{U}{8\nu} \right\},$$

так как $C_1(a) = 0$.

Таким образом, для 2-го приближения получаем:

$$z = ae^{i\psi} - \frac{\varepsilon a^3}{16} \sin 3\psi + \frac{\varepsilon U \nu (4 - 2a^2 - U^2)}{8(1 - \nu)} \cos \nu t - \frac{\varepsilon U^3 \nu}{8(1 - 3\nu)} \cos 3\nu t +$$

$$+ \frac{\varepsilon U a^2 (2 + \nu)}{8(\nu + 1)} \cos (\nu t + 2\psi) + \frac{\varepsilon U a^2 (2 - \nu)}{8(3 - \nu)} \cos (\nu t - 2\psi) +$$

$$+\frac{\varepsilon U^2 a(2\nu-1)}{8\nu}\sin(2\nu t+\psi)+\frac{\varepsilon U^2 a(1-2\nu)}{8\nu}\sin(2\nu t-\psi)+$$

$$+\varepsilon i\left\{\frac{a^3}{16}\cos 3\psi+\frac{U\nu(4-2a^2-U^2)}{8(1-\nu)}\sin\nu t+\right.$$

$$+\frac{U^3\nu}{8(1-3\nu)}\sin 3\nu t+\frac{Ua^2(2+\nu)}{8(\nu+1)}\sin(\nu t+2\psi)+$$

$$+\frac{Ua^2(2-\nu)}{8(3-\nu)}\sin(\nu t-2\psi)-\frac{U^2 a(2\nu-1)}{8\nu}\cos(2\nu t+\psi)-$$

$$\left.-\frac{U^2 a(1-2\nu)}{16\nu}\cos(2\nu t+\psi)\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

2. А. И. Лурье, О неустановившихся движениях в квазилинейных колебательных системах, Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 192, 1958.

Поступила 2. II 1963 г.
Киев