Обратные теоремы теории приближения функций в комплексных областях

В. К. Дзядык

1°. В 1956 г. в работе [1] были найдены для случая приближения непериодических функций алгебраическими многочленами на отрезке [—1, 1] полные аналоги обратных теорем, полученных для периодического случая в 1912—1919 гг. в работах С. Н. Бернштейна [2] и Валле Пуссена [3]. При этом выяснилось, что для доказательства этих теорем решающую роль играет одно специальное неравенство для оценки модуля производной от алгебраического многочлена.

В следующем 1957г. это неравенство было обобщено Г. К. Лебедем [4] и независимо от него Ю. А. Брудным [5]. Воспользовавшись этим обобщением, А. Ф. Тиман [6] указал возможность дальнейшего обобщения на отрезке [—1,1] наших обратных теорем. В 1959 г. в большом исследовании [7] нами были получены обратные теоремы для функций классов Липшица в комплексной области.

В этой работе, развивая дальше метод, примененный в [7], мы получили неравенства и обратные теоремы для различных замкнутых множеств с углами в комплексной плоскости. Упомянутые выше результаты Г. К. Лебедя, Ю. А. Брудного, А. Ф. Тимана и автора отсюда вытекают в виде частного случая.

Нам потребуются следующие определения и леммы.

Пусть $\mathfrak{M}$ — ограниченное замкнутое множество с односвязным дополнением G, граница C которого состоит из конечного числа жордановых дуг и пусть $\varphi(z) = \varphi(z;\ \mathfrak{M})$ — функция осуществляющая конформное отображение внешности $\mathfrak{M}$ на внешность единичного круга с центром в начале так, что при этом предел $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}$ существует и равен некоторому положительному конечному числу.

Через $\psi(w)$ обозначим функцию, обратную к $w = \varphi(z) : \psi(w) = \varphi^{-1}(w)$. Обозначим через $C_R\ (R \geqslant 1)$ линию уровня $|\varphi(z)| = R$, а через $\varrho_R(z) = \varrho_R(z;\ \mathfrak{M})$ и $\bar{\varrho}_R(\tilde{z}) = \bar{\varrho}_R(\tilde{z};\ \mathfrak{M})$ для всех $z \in C_1 = C$ и $\tilde{z} \in C_R$ величины

$$\varrho_R(z) = \min_{z' \in C_R} |z' - z|,\quad \bar{\varrho}_R(\tilde{z}) = \min_{z' \in C_1} |z' - \tilde{z}|. \tag{1}$$

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (A) в двух случаях:

1) если $\mathfrak{M}$ есть замкнутая ограниченная область с односвязным дополнением, граница которой состоит из конечного числа гладких дуг с непрерывной кривизной, образующих между собой в точках стыка углы $\alpha_j\pi$, $0 \leqslant \alpha_j < 2$ и 2) если $\mathfrak{M}$ есть аналитическая дуга, т. е. если $\mathfrak{M}$ есть

отрезок $[-1,1]$ или же дуга, которая получается из отрезка $[-1, 1]$ путем преобразования при помощи функции $\psi(z)$, аналитической в некоторой внешности отрезка $[-1, 1]$ и такой, что

$$0 < \inf_{z\in[-1,1]} |\psi'(z)| \leqslant \sup_{z\in[-1,1]} |\psi'(z)| < \infty.$$

Лемма 1. *Если множество $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (A), то расстояние $\varrho_R(z)$ от точек z границы $C = C_1$ до линии уровня C_R этого множества оценивается по формуле*

$$\varrho_R(z) = (R-1)\,\overline{O}\left\{\left[|z - z_i| + (R-1)^{\frac{1}{2-\alpha_i}}\right]^{\frac{1-\alpha_i}{2-\alpha_i}}\right\}, \tag{2}$$

где z_i — ближайшая к z точка стыка на кривой C.

При этом через $\overline{O}(\alpha)$ мы обозначаем (как здесь, так и впредь) величину, для которой найдутся две положительные постоянные A_1 и A_2* такие, что при всех рассматриваемых α

$$A_1 \cdot \alpha \leqslant \overline{O}(\alpha) \leqslant A_2 \cdot \alpha.$$

Справедливость этой леммы следует из теоремы 2.5, формулы (2.18′) и теоремы 2.1 работы [7].

Лемма 2. *Если множество $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (A), то*

1) *длина $s(z_1, z_2)$ кратчайшей из дуг, соединяющих произвольные две точки z_1 и z_2 кривой C, не превышает расстояния между этими точками, умноженного на некоторое постоянное число $A_3 = A_3(\mathfrak{M})$;*

2) *при некотором $\overline{R} > 1$ для всех $z \in C$ и $\widetilde{z} \in C_R$ при $1 < R < R_1 \leqslant \overline{R}$ выполняются соответственно неравенства*

$$|\psi[R\varphi(z)] - z| \leqslant A_4 \varrho_R(z), \tag{3′}$$

$$\left| z - \psi\left[\frac{1}{R}\varphi(\widetilde{z})\right]\right| \leqslant A_4\, \varrho_R(\widetilde{z}), \tag{3″}$$

$$A_4' \varrho_{R_1}(z) \leqslant |\psi[R_1\varphi(\widetilde{z})] - \widetilde{z}| \leqslant A_4 \varrho_{R_1}(z), \qquad z = \psi\left[\frac{\varphi(\widetilde{z})}{R}\right]; \tag{3‴}$$

3) *на всякой дуге $z_1 \smile z_2$ границы C множества $\mathfrak{M}$ найдется по крайней мере одна точка z^* такая, что при всех $z \in z_1 \smile z_2$ и $1 < R \leqslant \overline{R}$ будет иметь место неравенство*

$$\varrho_R(z) \leqslant A_5 \varrho_R(z^*); \tag{4}$$

4) *если z_0 — произвольная точка кривой C, то при каждом $L > 1$ ($L = \text{const}$) найдется число $\overline{R} > 1$ такое**, что для всех $R \in [1, \overline{R}]$ и всех $z \in C$, которые попали в круг радиуса $L\varrho_R(z_0)$ с центром в точке z_0, будем иметь*

$$A_6' \varrho_R(z_0) < \varrho_R(z) < A_6 \varrho_R(z_0), \quad A_6 = A_6(C;\ L). \tag{5}$$

Доказательство этой леммы немедленно следует из теоремы 2.4 работы [7] (см. стр. 721, 700 и 701).

---

* Через A_1, A_2, A_3 и т. д. всюду будем обозначать строго положительные постоянные.

** Это число можем считать таким же, как и в 2).

Лемма 3. *Если замкнутое множество $\mathfrak{M}$ с односвязным дополнением в некоторой окрестности угловой точки z_0 ограничено двумя кривыми C_1 и C_2 с непрерывной кривизной, образующих в точках стыка z_0 угол, равный $\alpha\pi$, $0 \leqslant \alpha < 2$, то функцию $\varphi(z)$, осуществляющую конформное отображение внешности $\mathfrak{M}$ на внешность единичного круга, и ее производную $\varphi'(z)$ можно в окрестности точки z_0 представить в виде*

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \lambda_1(z)(z - z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}}; \qquad \varphi'(z) = \lambda_2(z)\frac{d}{dz}(z - z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}}, \tag{6}$$

где $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$ — непрерывные функции и

$$\lambda_1(z_0) \neq 0, \qquad \lambda_2(z_0) \neq 0.$$

Эта лемма принадлежит Осгуду и Тейлору (см. [8], стр. 282—283).

2°. Теорема 1. *Пусть на отрезке $[0,1]$ задана возрастающая непрерывная функция $\omega(\delta)$, удовлетворяющая при каком-нибудь натуральном l условию*

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant A_7(\lambda + 1)^l \omega(\delta),$$

и пусть $\mathfrak{M}$ есть множество типа (A) с границей C. Тогда, если на C при каком-нибудь $s \geqslant 0$ многочлен $P_n(z)$ степени не выше n удовлетворяет при всех $z \in C$ неравенству

$$|P_n(z)| \leqslant [\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s \omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)], \tag{7}$$

то при каждом натуральном k его производная $P_n^{(k)}(z)$ будет при тех же $z (\in C)$ удовлетворять неравенству

$$|P_n^{(k)}(z)| \leqslant A_8[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{s-k}\omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]. \tag{8}$$

Доказательство. 1. Решив задачу Дирихле, найдем функцию $G(x, y)$, гармоническую в области G_∞, служащей дополнением в расширенной плоскости к $\mathfrak{M}$, и непрерывную на $\overline{G}_\infty$, которая в точках $x + iy = z \in C$ будет принимать значения, равные

$$\ln\{\omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]\cdot[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s\}.$$

Обозначив через $H(x, y)$ функцию, сопряженную к $G(x, y)$, получим аналитическую в G_∞ функцию

$$F(z) = e^{G(x, y) + iH(x, y)}, \tag{9}$$

для которой во всех точках $z \in C$

$$|F(z)| = \omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)][\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s. \tag{10}$$

Рассмотрим после этого для произвольного многочлена $P_n(z)$ степени $\leqslant n$, удовлетворяющего неравенству (7), вспомогательную функцию

$$\eta(z) = \frac{P_n(z)}{F(z)[\varphi(z)]^n}.$$

Эта функция является аналитической в G_∞ и правильной при $z = \infty$.

Поэтому, согласно принципу максимума модуля, при всех $z\in G$ имеем

$$|\eta(z)| = \left|\frac{P_n(z)}{F(z)\,[\varphi(z)]^n}\right| = \max_{\zeta\in C}\left|\frac{P_n(\zeta)}{F(\zeta)\cdot[\varphi(\zeta)]^n}\right| = \max_{\zeta\in C}\left|\frac{P_n(\zeta)}{F(\zeta)}\right| \leqslant 1,$$

так что при всех $z\in \overline{G}_\infty$

$$|P_n(z)| \leqslant |F(z)|\cdot|\varphi(z)|^n. \tag{11}$$

2. Убедимся, что во всех точках $\widetilde{z}$ линии уровня C_R при $R < 1 + \frac{1}{n}$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} |P_n(\widetilde{z})| &\leqslant A_9\omega\,[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]\cdot[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s,\\ |P_n(\widetilde{z})| &\leqslant A_{10}\omega\,[\bar\varrho_{1+\frac{1}{n}}(\widetilde{z}')]\,[\bar\varrho_{1+\frac{1}{n}}(\widetilde{z}')]^s, \end{aligned} \tag{12}$$

где z — точка границы C, образ которой находится на одном радиусе с образом точки $\widetilde{z}$; A_9 и A_{10} — положительные постоянные и

$$\widetilde{z}' = \varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right] = \varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\varphi(\widetilde{z})}{|\varphi(\widetilde{z})|}\right],$$

т. е.

$$z'\in C_{1+\frac{1}{n}},\ \arg\varphi(\widetilde{z}') = \arg\varphi(z) = \arg\varphi(\widetilde{z}).$$

Действительно, в силу (11)

$$|P_n(\widetilde{z})| \leqslant |F(\widetilde{z})|\cdot R^n \leqslant |F(\widetilde{z})|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e\,|F(\widetilde{z})|. \tag{13}$$

Поэтому, полагая $\varphi(\widetilde{z}) = Rw_0$, $G\left[\psi\left(\frac{1}{w}\right)\right] = \tau(w)$, на основании (10) и (9) видим, что для доказательства первого из неравенств (12) достаточно доказать одно из следующих эквивалентных между собою неравенств

$$\begin{gathered} |F[\psi(Rw_0)]| \leqslant A_{11}\,|F[\psi(w_0)]| = A_{11}\,|F(z)|,\\ e^{G[\psi(Rw_0)]} \leqslant A_{12}\,e^{G[\psi(w_0)]},\\ G[\psi(Rw_0)] - G[\psi(w_0)] \leqslant A_{13},\\ \tau\left(\frac{1}{Rw_0}\right) - \tau\left(\frac{1}{w_0}\right) \leqslant A_{13}. \end{gathered} \tag{14}$$

Учитывая, что функция $\tau(w)$ является гармонической в единичном круге и что в точках $w = e^{i\varphi}$ единичной окружности

$$\tau(e^{i\varphi}) = G\left[\psi\left(\frac{1}{e^{i\varphi}}\right)\right] = \ln\{\omega\,(\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})])\,(\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})])^s\},$$

при помощи интеграла Пуассона, положив для определенности, $\arg w_0 =$

---

* Из приводимого ниже доказательства видно, что эти неравенства имеют место также при $s<0$.

$= \varphi_0 = 0$, получаем

$$\tau\left(\frac{1}{Rw_0}\right) - \tau\left(\frac{1}{w_0}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\frac{1}{R^2}}{1-\frac{2}{R}\cos\varphi+\frac{1}{R^2}} \times$$

$$\times \ln \frac{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})]\}\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})]\}^s}{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(1)]\}\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(1)]\}^s}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-1}{R^2-2R\cos\varphi+1} \ln \frac{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})]\}}{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(1)]\}}\, d\varphi + \tag{15}$$

$$+ \frac{s}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-1}{R^2-2R\cos\varphi+1} \ln \frac{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})]}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(1)]}\, d\varphi = I_1 + I_2.$$

Пусть $e^{i\beta_0}$ — прообраз ближайшей к $z = \psi(w_0) = \psi(1)$ точки стыка на кривой C и пусть при некотором $c > 0$ дуга единичной окружности, соединяющая точки e^{-ic} и e^{ic} (и проходящая через единицу), содержит точку $e^{i\beta_0}$ и не содержит ни одного другого прообраза какой-либо точки стыка на кривой C.

Учитывая, что во всех точках стыка z_i по условию теоремы $\alpha_i\pi < 2\pi$ и полагая $\max_i\{\alpha_i;\ 1\} = \Lambda$ $(\Lambda < 2)$, на основании (2) легко устанавливаем, что во всех точках z кривой C

$$A_{14}\frac{1}{n^2} < \varrho_{1+\frac{1}{n}}(z) < A_{15}\frac{1}{n^{2-\Lambda}},$$

$$A_{16}\,\omega\left(\frac{1}{n^2}\right) \leqslant \omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)] \leqslant A_{17}\,\omega\left(\frac{1}{n^{2-\Lambda}}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{c}{2}} + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{c}{2}}^{\pi} \frac{R^2-1}{R^2-2R\cos\varphi+1} \ln\frac{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})]\}}{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(1)]\}}\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant A_{18}(R-1)\ln n < A_{19}. \tag{16}$$

Если же $\varphi \in \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right]$, то, обозначая через $\alpha_0\pi$ угол в точке стыка $\psi(e^{i\beta_0})$, вследствие (2) и (6) получаем

$$\frac{\Omega_\varphi}{\Omega_0} \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(e^{-i\varphi})]\}}{\omega\{\varrho_{1+\frac{1}{n}}[\psi(1)]\}} \leqslant$$

$$\leqslant A_{20}\frac{\omega\left\{\frac{1}{n}\left[|\psi(e^{-i\varphi})-\psi(e^{i\beta_0})| + \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]^{\frac{1-\alpha_0}{2-\alpha_0}}\right\}}{\omega\left\{\frac{1}{n}\left[|\psi(1)-\psi(e^{i\beta_0})| + \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]^{\frac{1-\alpha_0}{2-\alpha_0}}\right\}} =$$

$$=A_{21}\frac{\omega\left\{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\lambda_1(z)}\left|e^{-i\varphi}-e^{i\beta}\right|^{2-\alpha_0}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]^{\frac{1-\alpha_0}{2-\alpha_0}}\right\}}{\omega\left\{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\lambda_1(z)}\left|1-e^{i\beta}\right|^{2-\alpha_0}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]^{\frac{1-\alpha_0}{2-\alpha_0}}\right\}}\leqslant$$

$$\leqslant A_{22}\frac{\omega\left\{\frac{1}{n}\left[|\varphi-\beta_0|^{2-\alpha_0}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]^{\frac{1-\alpha_0}{2-\alpha_0}}\right\}}{\omega\left\{\frac{1}{n}\left[|\beta_0|^{2-\alpha_0}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]^{\frac{1-\alpha_0}{2-\alpha_0}}\right\}}.$$

Отсюда следует, что если $\alpha_0\leqslant 1$, то

$$\frac{\Omega_\varphi}{\Omega_0}\leqslant A_{23}\frac{\omega\left[\frac{1}{n}|\varphi-\beta_0|^{1-\alpha_0}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]}{\omega\left[\frac{1}{n}|\beta_0|^{1-\alpha_0}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]}\leqslant$$

$$\leqslant A_{24}\frac{\omega\left[\frac{1}{n}|\varphi|^{1-\alpha_0}+\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha_0}\right]}{\omega\left(\frac{1}{n^{2-\alpha_0}}\right)}\leqslant A_{25}\left[1+(n|\varphi|)^{l(1-\alpha_0)}\right], \tag{17}$$

а если $\alpha_0>1$ $(\alpha_0<2)$, то

$$\frac{\Omega_\varphi}{\Omega_0}\leqslant A_{26}\frac{\omega\left(\frac{1}{n|\varphi-\beta_0|^{\alpha_0-1}+n^{2-\alpha_0}}\right)}{\omega\left(\frac{1}{n|\beta_0|^{\alpha_0-1}+n^{2-\alpha_0}}\right)}\leqslant A_{27}\left(\frac{|\beta_0|}{|\varphi-\beta_0|+\frac{1}{n}}\right)^{l(\alpha_0-1)}. \tag{18}$$

Поэтому для слагаемого I_1 в (15) в силу (17) и (16) при $\alpha_0\leqslant 1$ найдем оценку

$$I_1\leqslant A_{28}\int\limits_{-(R-1)}^{R-1}\frac{R-1}{(R-1)^2}\ln A\left[1+(n|\varphi|)^{l(1-\alpha_0)}\right]d\varphi+$$

$$+A_{29}\int\limits_{R-1}^{\frac{c}{2}}\frac{R-1}{\varphi^2}\ln\left[1+(n\varphi)^{l(1-\alpha_0)}\right]d\varphi+O(1)=O(1),$$

а при $\alpha_0>1$ вследствие (18) —

$$I_1\leqslant A_{30}\int\limits_{-(R-1)}^{R-1}\frac{1}{R-1}\ln\frac{|\beta_0|}{|\varphi-\beta_0|+\frac{1}{n}}\,d\varphi+$$

$$+A_{31}(R-1)\left(\int\limits_{-c}^{-(R-1)}+\int\limits_{R-1}^{\frac{c}{2}}\right)\ln\frac{|\beta_0|}{|\varphi-\beta_0|+\frac{1}{n}}\cdot\frac{d\varphi}{\varphi^2}+O(1)=O(1).$$

Так как для слагаемого I_2 получим аналогичную оценку (в I_2 можно считать, что $\omega(t)=t$), то этим самым неравенство (14), а вместе с ним и первое из неравенств (12) полностью доказаны. Второе из неравенств (12) следует из первого вследствие того, что на основании (3′)

$$\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z) \geqslant \frac{1}{A_4}\left|\psi\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right]-z\right| \geqslant \frac{1}{A_4}\bar{\varrho}_{1+\frac{1}{n}}(\widetilde{z'}).$$

3°. После того как неравенства (12) установлены, для доказательства теоремы 1 остается почти дословно повторить доказательство теоремы 3.1 из работы [7] (см. стр. 726—729).

4°. Теорема 2. *Если для функции $f(z)$, заданной на границе C множества $\mathfrak{M}$ типа (A) при некотором модуле непрерывности, удовлетворяющем условию*

$$\int_0^l \frac{\omega(u)}{u}\,du < \infty, \tag{19}$$

существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(z)$ таких, что при каждом $n=1,2,\ldots$ во всех точках $z\in C$

$$|f(z)-P_n(z)| \leqslant [\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^r\,\omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)], \tag{20}$$

где r — целое $\geqslant 0$, то функция $f(z)$ имеет на кривой C r-ю непрерывную производную $f^{(r)}(z)$, модуль непрерывности $\omega(f^{(r)};\ t)$ которой будет удовлетворять неравенству

$$\omega(f^{(r)};\ t) \leqslant \begin{cases} A_0 t \displaystyle\int_t^l \frac{\omega(u)}{u^2}\,du, & \text{если } r=0,\\[2ex] A_r\left\{t\displaystyle\int_t^l \frac{\omega(u)}{u^2}\,du + \int_0^t \frac{\omega(u)}{u}\,du\right\}, & \text{если } r>0, \end{cases} \tag{21}$$

*где A_0 и A_r — положительные постоянные, зависящие только от множества $\mathfrak{M}$ и от r, а l — постоянное число >0 (например, диаметр множества $\mathfrak{M}$)**.

Доказательство. I. Рассмотрим сначала случай $r=0$.

Так как в произвольных двух точках z_1 и z_2 кривой C в силу (20)

$$f(z_2)-f(z_1) = P_1(z_2)-P_1(z_1) + \sum_{j=1}^{N}\{[P_{2^j}(z_2)-P_{2^j}(z_1)] -$$

$$-[P_{2^{j-1}}(z_2)-P_{2^{j-1}}(z_1)]\} + [f(z_2)-P_{2^N}(z_2)] - [f(z_1)-P_{2^N}(z_1)], \tag{22}$$

где N — произвольное натуральное число, то, положив $|z_2-z_1|=h$ и выбрав N так, чтобы

$$\varrho_{1+\frac{1}{2^N}}(z_2) < h \leqslant \varrho_{1+\frac{1}{2^{N-1}}}(z_2),$$

---

* Отмечу, что мажоранта в правой части неравенства (21) была в случае, когда $\mathfrak{M}=[-1,\ 1]$, впервые указана А. Ф. Тиманом (см. [6]).

учитывая сначала, что в силу (5) и (19)

$$\varrho_{1+\frac{1}{2^N}}(z_2) = \overline{O}\,[\varrho_{1+\frac{1}{2^N}}(z_1)] = \overline{O}\,(h),$$

а затем, что на основании (19) и (5) при всех $\zeta \in z_1 \smile z_2$

$$|P_{2^j}(\zeta) - P_{2^{j-1}}(\zeta)| \leq A_{33}\,\omega\,[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)],$$

$$|P'_{2^j}(\zeta) - P'_{2^{j-1}}(\zeta)| \leq A_{34}\,\frac{\omega\,[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)},$$

получаем

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{z_1}^{z_2} |P'_{2^j}(\zeta) - P'_{2^{j-1}}(\zeta)|\,|d\zeta| +$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2} |P'_1(\zeta)|\,|d\zeta| + A_{35}\omega(h) \leq A_{36}\,h \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega\,[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)} + A_{35}\omega(h). \qquad (23)$$

Поэтому, принимая во внимание, что при всех $j = 1, 2, \ldots$ в силу неравенств $(3') - (3''')$

$$\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2) \leqslant \left|\psi\left[\left(1+\frac{1}{2^j}\right)\varphi(z_2)\right] - z_2\right| + \left|\psi\left[\frac{2^j+2}{2^j+1}\,\varphi(\widetilde{z}_2)\right] - \widetilde{z}_2\right| \leqslant$$

$$\leqslant A_4\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2) + A_4\varrho_{1+\frac{1}{2^{j+1}}}(z_2) \leq 2A_4\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2),$$

$$\widetilde{z}_2 = \psi\left[\left(1+\frac{1}{2^j}\right)\varphi(z_2)\right],$$

так что

$$\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2) > \frac{1}{2A_4}\,\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2), \qquad (24)$$

а в силу $(3') - (3''')$ и (5)

$$\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2) \geqslant \varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2) + A'_4A'_6\varrho_{1+\frac{1}{2^{j+1}}}(z_2) \geqslant \varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)\left(1+\frac{A'_4A'_6}{2A_4}\right),$$

так что

$$\frac{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)}{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)} \leqslant \frac{1}{1+\frac{A'_4A'_6}{2A_4}} = A_{37} < 1, \qquad (24')$$

найдем

$$\int_{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)}^{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \geqslant A_{38}\,\frac{\omega\,[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)]}{[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)]^2}\,[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2) - \varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)] \geqslant$$

$$\geqslant A_{39}\,\frac{\omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)}\left[1 - \frac{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)}{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)}\right] \geqslant A_{40}\,\frac{\omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)}.$$

Подставляя эту оценку в (21), находим

$$|f(z_2)-f(z_1)|\leqslant \frac{A_{36}}{A_{40}}h\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)}^{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+A_{35}\omega(h)\leqslant$$

$$\leqslant A_{41}h\int\limits_h^l\frac{\omega(u)}{u^2}\,du,$$

и теорема для случая $r=0$ доказана.

II. Поскольку для всякого модуля непрерывности существует модуль непрерывности $\omega^*(u)$ такой, что

$\frac{1}{2}\omega(u)<\omega^*(u)\leqslant\omega(u)$ и $\frac{\omega^*(u)}{u}$ не возрастает (см. например [9], стр. 112, 3. 2. 5), то с самого начала будем считать, что отношение $\frac{\omega(u)}{u}$ на отрезке $[0, l]$ не возрастает. В таком случае функция

$$\Omega(t)=\int\limits_0^t\frac{\omega(u)}{u}\,du,\quad t\in[0,l],$$

как легко проверить, также будет модулем непрерывности*.

Поскольку при каждом $j=1,2,\ldots$

$$\int\limits_{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)}^{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)}\frac{\omega(u)}{u}\,du\geqslant\frac{\omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)}[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)-\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)]\geqslant$$

$$\geqslant A_{42}\,\omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)]\left[1-\frac{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z_2)}{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)}\right]>A_{43}\omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z_2)],$$

то, представив функцию $f(z)$ в виде ряда

$$f(z)=P_1(z)+\sum_{j=1}^{\infty}[P_{2^j}(z)-P_{2^{j-1}}(z)],$$

после r-кратного почленного дифференцирования его, учитывая, что в силу (20) и теоремы 1

$$|P_{2^j}(z)-P_{2^{j-1}}(z)|\leqslant 2[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z)]^r\omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z)],$$

$$|P_{2^j}^{(r)}(z)-P_{2^{j-1}}^{(r)}(z)|\leqslant A_{44}\omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z)],$$

---

* При более тщательной проверке можно убедиться, что при выполнении условия (19) функция $\Omega(t)$ будет модулем непрерывности также без требования, чтобы отношение $\frac{\omega(u)}{u}$ не возрастало.

при каждом натуральном j получаем

$$|f^{(r)}(z) - P^{(r)}_{2^j}(z)| \leqslant \sum_{k=j+1}^{\infty} |P^{(r)}_{2^k}(z) - P^{(r)}_{2^{k-1}}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant A_{44} \sum_{k=j+1}^{\infty} \omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^{k-1}}}(z)] \leqslant \frac{A_{44}}{A_{43}} \int\limits_0^{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)} \frac{\omega(u)}{u}\, du = \frac{A_{44}}{A_{43}} \Omega[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)].$$

Поэтому, на основании случая I, находим

$$\omega(f^{(r)};\ t) \leqslant A_0 t \frac{A_{44}}{A_{43}} \int\limits_t^l \frac{\Omega(u)}{u^2}\, du =$$

$$= A_{45}\left(t\, \frac{\Omega(u)}{u}\Bigg|_l^t + t \int\limits_t^l \frac{\omega(u)}{u^2}\, du \right) \leqslant A_r \left\{ t \int\limits_t^l \frac{\omega(u)}{u^2}\, du + \int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u}\, du \right\}.$$

Теорема полностью доказана.

5°. Отметим в заключение, что для множеств $\mathfrak{M}$ типа (A), граница которых состоит из конечного числа прямолинейных отрезков, при условиях теоремы 2 можно на каждом из этих отрезков получить также для k-го модуля непрерывности $\omega_k(f;\ \delta)$ функции $f(z)$ оценку через $\omega(u)$ (аналогично тому, как это указано А. Ф. Тиманом для отрезка $[-1, 1]$ в [9], стр. 357).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дзядык, О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip $\alpha (0 < \alpha < 1)$ на конечном отрезке вещественной оси, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, 1956, 623—642.

2. С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, 2-я серия, т. XIII, № 2—3, 1913, 49—144.

3. Ch. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable reelle, Paris, 1919.

4. Г. К. Лебедь, Неравенства для многочленов и их производных, ДАН СССР, т. 117, 1957, 570—572.

5. Ю. А. Брудный, Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси, ДАН СССР, т. 124, 1959, 739—742.

6. А. Ф. Тиман, Обратные теоремы конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси, ДАН СССР, т. 116, 1957, 762—765.

7. В. К. Дзядык, О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, 1959, 697—736.

8. W. E. Osgood and E. H. Taylor, Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition, Trans. Amer. Math. Soc., 14, 1913, 277—298.

9. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.

Поступила 20.II 1962 г.
Киев

Converse theorems of the theory of approximation of functions in complex regions

V. K. Dzjadyk

Summary

An inequality is established for the modulus of the derivative of the algebraic polynomial $P_n(z)$ of degree n to the effect that if, on an analytic

arc C on a piecewise-smooth boundary C of a simply connected region G, $P_n(z)$ satisfies the condition

$$|P_n(z)| \leqslant [\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s \omega|\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)|, \tag{1}$$

where $\omega(t)$ is some modulus of continuity, $\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)$ is the distance from $z \in C$ to the nth line of level C_n (i. e. to the line $|\Phi(z) = R\left(1+\frac{1}{n}\right)$, where $\Phi(z)$ is the mapping function of the outside C on the outside of a unit circle, and R is the conforming radius, G and $s > 0$ then

$$|P_n^{\prime}(z)| \leqslant A[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{s-1}\omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)], \quad A = \text{const} \tag{2}$$

After this an estimate is given of the continuity modulus of the rth derivative (r is a whole number $\geqslant 0$) of the function $f(z)$ on C under the condition that with each natural n a polynomial $P_n(z)$ can be found for it, such that

$$|f(z) - P_n^{r}(z)| \leqslant [\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^r \omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)] \tag{3}$$