К теории финитно апроксимируемых групп

Д. М. Смирнов

Полугруппа G называется *финитно апроксимируемой* [1], если для любых двух различных элементов a, b из G существует гомоморфизм σ полугруппы G в конечную полугруппу, при котором образы a^σ, b^σ элементов a, b различны. В настоящей статье доказывается финитная апроксимируемость полугрупп эндоморфизмов некоторых классов групп и устанавливается связь финитной отделимости [1] с финитной апроксимируемостью в классе нильпотентных групп.

1. Множество подгрупп конечного индекса группы G, пересечение которых равно единице, будет называться *финитным фильтром* (ср. [2]). Ясно, что группа G тогда и только тогда финитно апроксимируема, когда она обладает финитным фильтром.

Условимся называть полугруппой эндоморфизмов группы G всякую подполугруппу полугруппы всех эндоморфизмов этой группы.

Пусть Е — полугруппа эндоморфизмов группы G. Финитный фильтр группы G, состоящий из Е-допустимых подгрупп, назовем Е-допустимым.

Теорема 1. *Полугруппа эндоморфизмов* Е *группы* G, *обладающей* Е-*допустимым финитным фильтром, финитно апроксимируема.*

Доказательство. Пусть ε_1, ε_2 — различные эндоморфизмы группы G, содержащиеся в полугруппе Е. Выберем в группе G такой элемент g, что $g^{\varepsilon_1}(g^{\varepsilon_2})^{-1} \neq 1$. По условию группа G обладает Е-допустимой подгруппой H конечного индекса, не содержащей элемента $g^{\varepsilon_1}(g^{\varepsilon_2})^{-1}$. В силу Е-допустимости H из $a \equiv b \pmod H$ следует $a^\varepsilon \equiv b^\varepsilon \pmod H$ для любых $a, b \in G$, $\varepsilon \in$ Е. Поэтому соответствие $Ha \to Ha^\varepsilon$ определяет для каждого элемента ε из Е преобразование множества правосторонних классов смежности группы G по подгруппе H. Обозначим это преобразование $\bar{\varepsilon}$, а полугруппу всех подстановок множества правосторонних классов смежности G по H — через П. Так как индекс H в G конечен, то полугруппа П конечна.

Ставя в соответствие каждому элементу ε из Е подстановку $\bar{\varepsilon}$, мы получим, очевидно, гомоморфное отображение полугруппы Е в конечную полугруппу П. Так как $Hg^{\varepsilon_1} \neq Hg^{\varepsilon_2}$, то $\bar{\varepsilon}_1 \neq \bar{\varepsilon}_2$. Теорема 1 доказана.

Отметим некоторые следствия этой теоремы. Так как подполугруппа финитно апроксимируемой полугруппы сама финитно апроксимируема, то имеет место

Следствие 1. *Группа автоморфизмов* Ф *группы* G, *обладающей* Ф-*допустимым финитным фильтром, финитно апроксимируема.*

Как показал Б. Г. Нейман [3], в группе G с конечным числом образующих каждая подгруппа H конечного индекса содержит подгруппу N, которая вполне характеристична в G и также имеет конечный индекс. Отсюда следует, что всякая финитно апроксимируемая группа G с конечным числом образующих обладает финитным фильтром, состоящим из вполне характеристических подгрупп этой группы, и мы получаем

Следствие 2. *Полугруппа всех эндоморфизмов (в частности, группа всех автоморфизмов) любой финитно апроксимируемой группы с конечным числом образующих финитно апроксимируема.*

В работе А. И. Мальцева [1] показано, что полупрямое произведение финитно апроксимируемой группы на финитно апроксимируемый нормальный делитель с конечным числом образующих является финитно апроксимируемой группой. Из этого результата и следствия 2 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Гомороморф* Г *финитно апроксимируемой группы* G *с конечным числом образующих финитно апроксимируем.*

Финитно аппроксимируемыми группами являются свободные группы [4], а также свободные разрешимые группы [2]. Поэтому справедливо и

С л е д с т в и е 4. *Полугруппа всех эндоморфизмов свободной группы конечного ранга и свободной разрешимой группы с конечным числом образующих финитно аппроксимируема.*

В работе А. И. Мальцева [1] показано, что вполне характеристическим финитным фильтром обладает всякая ограниченная разрешимая группа. Поэтому имеет место

С л е д с т в и е 5. *Полугруппа всех эндоморфизмов любой ограниченной разрешимой группы финитно аппроксимируема.* В частности, *финитно аппроксимируемы полугруппы эндоморфизмов полициклических групп**.

Так как в любой группе всякая подгруппа конечного индекса содержит нормальный делитель конечного индекса, то справедливо такое утверждение.

С л е д с т в и е 6. *Если группа G финитно аппроксимируема, то ее факторгруппа по центру также финитно аппроксимируема.*

Отсюда получаем

С л е д с т в и е 7. *В финитно аппроксимируемой нильпотентной группе все факторы верхнего центрального ряда финитно аппроксимируемы.*

2. Подгруппа H группы G называется *финитно отделимой* от элемента g группы G, не принадлежащего H, если существует гомоморфизм σ группы G в конечную группу, для которого $g^{\sigma} \notin H^{\sigma}$. Группа, все подгруппы которой финитно отделимы от несодержащихся в них элементов, называется группой с финитно отделимыми подгруппами [1].

Т е о р е м а 2. *Нильпотентная группа G тогда и только тогда является группой с финитно отделимыми подгруппами, когда все факторгруппы ее финитно аппроксимируемы.*

Докажем сначала следующие две леммы.

Л е м м а 1. *Всякое конечное расширение G группы H с финитно отделимыми подгруппами само имеет финитно отделимые подгруппы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — элемент группы G и B — подгруппа из G, не содержащая элемента a. Мы должны доказать существование такого нормального делителя N конечного индекса группы G, что $a \notin NB$.

Если $a \notin HB$, то в качестве N можно взять H. Пусть $a \in HB$. Тогда элемент a можно записать в виде $a = hb$, где $h \in H$, $b \in B$. Так как $a \notin B$, то $h \notin (H \cap B)$. Поскольку подгруппы в H отделимы, то существует нормальный делитель M конечного индекса в H такой, что $h \notin M(H \cap B)$. M будет подгруппой конечного индекса и в G и поэтому M содержит нормальный делитель N группы G, имеющий в G конечный индекс. Ясно, что $h \notin N(H \cap B)$. Покажем, что $a \notin NB$.

Допустим, что $a \in NB$. Тогда элемент a можно записать в виде $a = h_1 b_1$, где $h_1 \in N$, $b_1 \in B$. Получаем: $hb = h_1 b_1$, отсюда $h_1^{-1} h = b_1 b^{-1} \in (H \cap B)$, $h = h_1 (b_1 b^{-1}) \in N(H \cap B)$, что невозможно.

Л е м м а 2. *Если финитно аппроксимируемая группа G содержит конечный нормальный делитель N, факторгруппа по которому G/N имеет финитно отделимые подгруппы, то G — группа с финитно отделимыми подгруппами.*

Так как N содержит лишь конечное число элементов, отличных от единицы, то существует нормальный делитель K конечного индекса группы G, пересекающийся с N по единице. В силу изоморфизма $K \cong KN/NK$ имеет финитно отделимые подгруппы. По лемме 1 G также является группой с финитно отделимыми подгруппами.

* Группа G называется *полициклической* или *A_5=группой* если она обладает конечным нормальным рядом с циклическими факторами.

Переходим к доказательству теоремы 2. Ее утверждение для абелевых групп очевидно. Поэтому предположим, что теорема 2 доказана для нильпотентных групп с длиной верхнего центрального ряда, меньшей n, и что G — нильпотентная группа с финитно отделимыми нормальными делителями*, принадлежащая классу нильпотентности n. Центр группы G обозначим через Z.

Факторгруппа G/Z имеет финитно отделимые нормальные делители и является нильпотентной группой класса $n-1$. В силу индуктивного предположения G/Z — группа с финитно отделимыми подгруппами.

Пусть a — произвольный элемент из G и B — подгруппа группы G, не содержащая элемента a. Если $a \notin ZB$, то подгруппа B финитно отделима от элемента a в силу индуктивного предположения. Пусть $a \in ZB$. Тогда элемент a можно записать в виде $a = zb$, где $z \in Z$, $b \in B$. Так как $a \notin B$, то $z \notin B$. Достаточно доказать, что подгруппа B финитно отделима от элемента z. В самом деле, если будет доказано существование нормального делителя N конечного индекса в G, для которого $z \notin NB$, то тем самым будет доказана и отделимость B от a, так как $a \notin NB$.

Пусть $Z_0 = B \cap Z$. Поскольку Z есть центр G, то Z_0 — нормальный делитель в G. Образ элемента z в G/Z_0 не принадлежит образу подгруппы B. Поэтому достаточно доказать финитную отделимость образа B от образа a в G/Z_0.

Чтобы не менять обозначений, предположим, что $Z_0 = 1$ и что Z есть центральная подгруппа группы G, факторгруппа по которой имеет финитно отделимые подгруппы. Положим $H = ZB$. Так как B — нормальный делитель в H и $Z \cap B = 1$, то H является прямым произведением групп Z и B:

$$H = Z \times B.$$

Поскольку G есть группа с финитно отделимыми нормальными делителями, то Z является группой с финитно отделимыми подгруппами. В силу изоморфизма $B \cong ZB/Z$ группа B также имеет финитно отделимые подгруппы, так как в силу индуктивного предположения этим свойством обладает факторгруппа G/Z. Прямое произведение конечного числа групп с финитно отделимыми подгруппами само является группой с финитно отделимыми подгруппами ([1], теорема 4). Поэтому существует нормальный делитель N конечного индекса в H такой, что $z \notin NB$.

Пусть Z^* — компонента N в прямом множителе Z. Очевидно, $z \notin Z^*$, так как в противном случае в N существовал бы такой элемент n, что $n = zb_0$, где $b_0 \in B$, и мы имели бы $z = nb_0^{-1} \in NB$, вопреки выбору N. Элемент z не принадлежит также и подгруппе $Z^* \times B$ группы H, так как запись $z = z \cdot 1$ в H единственна. Таким образом, образ элемента z в факторгруппе G/Z^* не входит в образ подгруппы B.

Так как $(Z \cap N) \subseteq Z^* \subseteq Z$ и $Z/Z \cap N \cong NZ/N$, то Z^* имеет конечный индекс в Z. Следовательно, Z/Z^* — конечный нормальный делитель группы G/Z^*, факторгруппа по которому, будучи изоморфна G/Z, имеет финитно отделимые подгруппы. В силу леммы 2 G/Z^* есть группа с финитно отделимыми подгруппами. Поэтому образ B в G/Z^* финитно отделим от образа элемента z. Отсюда следует, что подгруппа B финитно отделима от элемента z в группе G. Теорема 2 доказана.

3. Следующий пример показывает, что теорема 2 не может быть распространена на разрешимые группы.

Пусть G — группа с образующими элементами a, b и определяющим соотношением $ba = a^2b$. Положим $A = \{a\}$, $A_n = b^{-n}Ab^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

* Финитная отделимость всех нормальных делителей группы G и означает, очевидно, финитную апроксимируемость всех факторгрупп этой группы.

Объединение B цепочки подгрупп $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ является абелевым нормальным делителем группы G, изоморфным аддитивной группе двоичных рациональных дробей. Так как $G = \{B, b\}$, то факторгруппа G/B циклическая. Следовательно, G — двуступенная разрешимая группа. Факторгруппа аддитивной группы двоичных рациональных дробей по подгруппе целых чисел является квазициклической (типа 2^∞) и поэтому не финитно апроксимируема. Таким образом, группа G содержит финитно неотделимые подгруппы. Покажем, однако, что все факторгруппы группы G (в том числе и сама группа G) финитно апроксимируемы.*

Убедимся сначала в том, что все факторгруппы G по истинным нормальным делителям являются полициклическими.

Пусть H — произвольный нормальный делитель группы G, отличный от единицы. Покажем, что $H \cap A \neq 1$.

Допустим, что $H \cap A = 1$. Тогда $H \cap B = 1$, так как если $d \in (H \cap B)$ то элемент d можно записать в виде $d = b^{-n}a^m b^n$, откуда $a^m = b^n d b^{-n} \in$ $\in (H \cap A)$ и поэтому $m = 0$, т. е. $d = 1$. Из того, что B и H пересекаются по единице, следует, что всякий элемент из H перестановочен с любым элементом из B. В частности, каждый элемент из H перестановочен с любым элементом из A. Пусть $h \in H$, $h \neq 1$. Элемент h можно записать в виде $h = gb^m$, где $g \in B$, $m \neq 0$. Отсюда $h^{-1}ah = b^{-m}ab^m$, так как подгруппа B абелева. В силе перестановочности h и a должно быть: $b^{-m}ab^m = a$, что невозможно, так как $m \neq 0$. Итак, доказано, что $H \cap A \neq 1$.

Покажем, что факторгруппа $B/B \cap H$ является циклической. Обозначим через n наименьшее положительное число, для которого $a^n \in H$. Число n нечетно. В самом деле, если бы $n = 2m$, то мы имели бы $ba^m b^{-1} =$ $= (bab^{-1})^m = a^n \in H$, откуда $a^m \in H$, что противоречило бы выбору n. Пусть $g \in B$. Элемент g можно записать в виде $g = b^{-m}a^k b^m$, где $m > 0$. Так как $(2^m, n) = 1$, то существуют такие целые числа u и v, что $1 = 2^m u + nv$, откуда $k = 2^m u_1 + nv_1$, где $u_1 = ku$, $v_1 = kv$. Поскольку $b^m ab^{-m} = a^{2^m}$, то $a^k = (b^m ab^{-m})^{u_1} a^{nv_1}$, откуда $g = a^{u_1} b^{-m} a^{nv_1} b^m$. Если $u_1 = qn + r$, где $0 \leqslant$ $\leqslant r < n$, то $g = a^r d$, где элемент $d = a^{nq}(b^{-m}a^n b^m)^{v_1} \in (H \cap B)$. Таким образом, элемент g принадлежит смежному классу $a^r D$ группы B по подгруппе $D = H \cap B$, и поэтому B/D является циклической группой, изоморфной группе вычетов по модулю n.

В силу изоморфизма $HB/H \cong B/D$ факторгруппа HB/H также циклическая. Следовательно, факторгруппа G/H является полициклической.

Согласно теореме Гирша [5] всякая полициклическая группа финитно апроксимируема. Таким образом, все факторгруппы группы G по истинным нормальным делителям финитно апроксимируемы.

Остается установить финитную апроксимируемость самой группы G. Пусть n — натуральное число, B^n — подгруппа группы G, порожденная n-ми степенями элементов из B. Факторгруппа B/B^n конечна, а пересечение $H \cap B^n$ подгрупп B^n для $n = 1, 2, \ldots$ равно 1. Следовательно, группа B финитно апроксимируема. Подгруппа B^n, будучи характеристической в B, является нормальным делителем в G с полициклической факторгруппой G/B^n. Таким образом, группа G апроксимируема полициклическими группами, а следовательно, и финитно апроксимируема.

4. Следующая теорема показывает, что класс групп с финитно отделимыми подполугруппами в точности совпадает с классом периодических групп с финитно отделимыми подгруппами.

Теорема 3. *Группа G с финитно отделимыми подполугруппами является периодической.*

Для доказательства заметим, что если группа G имеет финитно отдели-

---

* Это следует также из работы Холла (P. Hall, Proc. London Math. Soc., 9, 1959, 595).

мые подполугруппы, то всякая подгруппа H группы G также является, очевидно, группой с финитно отделимыми подполугруппами.

Покажем теперь, что циклическая группа A бесконечного порядка содержит финитно неотделимую подполугруппу.

Пусть A порождается элементом a. Обозначим через B подполугруппу группы A, состоящую из всех положительных степеней элемента a. Покажем, что B финитно неотделима от элемента a^{-1}.

Допустим, что A содержит подгруппу C конечного индекса такую, что $a^{-1}\overline{\in}CB$. Подгруппа C должна быть циклической, отличной от единицы. Пусть она порождается элементом a^r, где $r > 0$. Так как $a^{-1}\overline{\in}C$, то $r \geqslant 2$. Следовательно, B содержит элемент a^{r-1} и поэтому $a^{-1} = a^{-r}a^{r-1} \in CB$. Мы получили противоречие, и теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев, О гомоморфизмах на конечные группы, Учен. зап. Ивановск. пед. и-та, т. 18, 1958, 49—60.

2. K. W. Gruenberg, Residual properties of infinite soluble groups, Proc. London Math. Soc., **7** (3), 1957, 29—62.

3. B. H. Neumann, Identical relations in groups, I Math. Ann., 1937, **114**, 506—525.

4. А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, М., 1953.

5. K. A. Hirsch, On infinite soluble groups (IV), J. London Math. Soc., **27**, 1952, 81—85.

Поступила 4.I 1961 г.
Иваново (обл.)

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В моей статье, помещенной в Украинском математическом журнале, т. XV, № 3, 1963 г. на стр. 344 вместо «a Krylov profile», следует читать «an aerofoile»;

Г. С. Липовой