Линейные методы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение

В. Т. Гаврилюк

Рассмотрим класс $C_{2\pi}$ непрерывных функций $f(x)$ периода 2π.

С помощью треугольной матрицы $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ \lambda_0^{(n)} = 1,\ \lambda_{n+1}^{(n)} = 0)$ каждой функции $f(x)$ ставятся в соответствие тригонометрические полиномы $U_n(f,\ x;\ \Lambda)$:

$$U_n(f,\ x;\ \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Через $E_k(f)$ будем обозначать наилучшие равномерные приближения функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; A, A_1, A_1', A_2, A_4, A_4', ... будут обозначать абсолютные постоянные.

В работах ряда авторов рассматривается задача об оценке уклонения функции $f(x)$ от приближающего ее полинома через наилучшее приближение этой функции.

Первым результатом такого рода является неравенство Лебега (см. [4])

$$\| f(x) - S_k(f,\ x) \|_C \leqslant A \ln k E_k(f), \tag{I}$$

где $S_k(f)$ — сумма Фурье функции $f(x)$.

В дальнейшем Валле Пуссен [1*a*, 1*b*] рассмотрел суммы

$$V_{n,p}(f,\ x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} S_k(f,\ x) \quad (p \leqslant n)$$

и получил для них оценку

$$\| f(x) - V_{n,p}(f,\ x) \|_C \leqslant 2 \frac{n+1}{p+1} E_{n-p}(f). \tag{II}$$

С. Б. Стечкиным [5] для уклонения функции $f(x) \in C_{2\pi}$ от суммы Фейера $F_k(f,\ x) = \dfrac{1}{k+1} \sum\limits_{i=0}^{k} S_k(f,\ x)$ установлена оценка

$$\| f(x) - F_k(f,\ x) \|_C \leqslant \frac{A_1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} E_i(f). \tag{III}$$

Некоторое обобщение результата С. Б. Стечкина получено Р. Н. Ковальчуком [3].

М. Ф. Тиман [6] рассмотрел произвольные линейные методы $U_n(f, x; \Lambda)$ и для функций $f(x) \in L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ установил следующее неравенство (см. РЖ „Математика" № 8, 1963 г.):

$$\| f(x) - U_n(f, x; \Lambda) \|_{L_p} \leqslant A \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) \, | \Delta^2 \lambda_k^{(n)} | \, E_k(f)_{L_p} \sum_{i=n-k}^{2n} \frac{1}{i+1} + \right.$$
$$\left. + \, | 1 - \lambda_1^{(n)} | \sum_{i=0}^{n} E_i(f)_{L_p} \right\}, \tag{IV}$$

где

$$\Delta^2 \lambda_k^{(n)} = \Delta \lambda_k^{(n)} - \Delta \lambda_{k+1}^{(n)}, \quad \Delta \lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)}.$$

На второй Всесоюзной конференции по конструктивной теории функций А. В. Ефимов высказал предположение, что неравенство М. Ф. Тимана (IV) может быть улучшено.

В настоящей работе мы устанавливаем оценку для нормы уклонения $\| f(x) - U_n(f, x; \Lambda) \|_C$, которая является уточнением неравенства (IV). Именно доказана следующая теорема.

Теорема. *Если $f(x) \in C_{2\pi}$, то для любой матрицы Λ имеет место неравенство*

$$\| f(x) - U_n(f, x; \Lambda) \|_C \leqslant A \left\{ \sum_{k=0}^{\nu-1} E_k(f) \sum_{i=k}^{\nu-1} | \Delta^2 \lambda_k^{(n)} | + \right.$$
$$+ \, | \Delta \lambda_\nu^{(n)} | \sum_{i=0}^{\nu} E_i(f) + \left[\sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \, | \Delta^2 \lambda_k^{(n)} | + \sum_{k=\nu+3}^{n} \frac{| \lambda_k^{(n)} |}{(n-k+1)} + \right.$$
$$\left. \left. + \max \{ | \lambda_{\nu+1}^{(n)} |, \; | \lambda_{\nu+2}^{(n)} | \} \right] E_\nu(f) \right\}, \tag{1}$$

где A — абсолютная постоянная, $\nu = \left[\dfrac{n}{2} \right]$.

Доказательство. Представим $U_n(f, x; \Lambda)$ в виде (см. [2] стр. 750)

$$U_n(f, x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) \Delta^2 \lambda_k^{(n)} F_k(f, x) + (\nu+1) \Delta \lambda_\nu^{(n)} F_\nu(f, x) +$$
$$+ (n-\nu) \Delta \lambda_{\nu+1}^{(n)} V_{n, n-\nu-1}(f, x) - \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta^2 \lambda_k^{(n)} V_{n, n-k-1}(f, x), \tag{2}$$

где $F_k(f, x)$ — суммы Фейера, $V_{n, n-k-1}(f, x)$ — суммы Валле Пуссена функции $f(x)$.

Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} \Delta \lambda_k^{(n)} = 1$, то $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \Delta \lambda_k^{(n)} f(x)$.

С помощью преобразования Абеля получаем:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \Delta \lambda_k^{(n)} f(x) + \sum_{k=\nu+1}^{n} \Delta \lambda_k^{(n)} f(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1) \Delta^2 \lambda_k^{(n)} f(x) +$$
$$+ (\nu+1) \Delta \lambda_\nu^{(n)} f(x) + (n-\nu) \Delta \lambda_{\nu+1}^{(n)} f(x) - \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta^2 \lambda_k f(x). \tag{3}$$

Учитывая (2) и (3), находим:

$$f(x) - U_n(f, x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{\nu-1} (k+1)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} [f(x) - F_k(f, x)] +$$

$$+ (\nu+1)\, \Delta\lambda_\nu [f(x) - F_\nu(f, x)] + (n-\nu)\, \Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)} [f(x) - V_{n, n-\nu-1}(f, x)] +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} [V_{n, n-k-1}(f, x) - f(x)]\,. \tag{4}$$

Представим $V_{n, n-k}(f, x)$ в виде (см. [2], стр. 751)

$$V_{n, n-k}(f, x) = M_{n, n-k}(f, x) + N_{n, n-k}(f, x)\,, \tag{5}$$

где

$$M_{n, n-k}(f, x) = \begin{cases} V_{n, n-k}(f, x) & \text{при } 0 \leqslant |x| \leqslant \dfrac{2\pi}{n-k+2}, \\ \quad 0 & \text{при } \dfrac{2\pi}{n-k+2} < |x| \leqslant \pi\,; \end{cases} \tag{6}$$

$$N_{n, n-k}(f, x) = \begin{cases} \quad 0 & \text{при } 0 \leqslant |x| \leqslant \dfrac{2\pi}{n-k+2}, \\ V_{n, n-k}(f, x) & \text{при } \dfrac{2\pi}{n-k+2} < |x| \leqslant \pi\,. \end{cases} \tag{7}$$

Обозначая через $T_{\nu+2}(x)$ полином наилучшего приближения (порядка $\nu+2$) функции $f(x)$ и учитывая, что $V_{n, n-k-1}(T_{\nu+2}, x) = T_{\nu+2}(x)$ при $k = \nu+1, \ldots, n-1$, последнюю сумму формулы (4) запишем следующим образом:

$$\sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} [V_{n, n-k-1}(f, x) - f(x)] =$$

$$= \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} [V_{n, n-k-1}(f - T_{\nu+2}, x) + T_{\nu+2}(x) - f(x)] =$$

$$= \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} [T_{\nu+2}(x) - f(x)] +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k) \Delta^2 \lambda_k^{(n)} N_{n, n-k-1}(f - T_{\nu+2}, x) +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} M_{n, n-k-1}(f - T_{\nu+2}, x)\,. \tag{8}$$

Сумму $\sum\limits_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} M_{n, n-k-1}(f - T_{\nu+2}, x)$ запишем в виде (см. [2], стр. 751)

$$\sum_{k=\nu+1}^{n-1} (n-k)\, \Delta^2 \lambda_k^{(n)} M_{n, n-k-1}(f - T_{\nu+2}, x) =$$

$$= (n-\nu-1)\, \Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)} M_{n, n-\nu-2}(f - T_{\nu+2}, x) +$$

$$+\sum_{k=\nu+2}^{n-1}(n-k)\,\Delta\lambda_k^{(n)}\,[M_{n,\,n-k-1}(f-T_{\nu+2},\ x)-M_{n,\,n-k}(f-T_{\nu+2},\ x)]-$$

$$-\sum_{k+\nu=3}^{n}\lambda_k^{(n)}\,[M_{n,\,n-k}(f-T_{\nu+2},\ x)-M_{n,\,n-k+1}(f-T_{\nu+2},\ x)-$$

$$-\lambda_{\nu+2}M_{n,\,n-\nu-2}(f-T_{\nu+2},\ x)\,. \tag{9}$$

Из (4)—(9) получаем:

$$\|f(x)-U_n(f,\ x;\ \Lambda)\|_C\leqslant\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|\,\|f(x)-F_k(f,\ x)\|_C+$$

$$+(\nu+1)\,|\,\Delta\lambda_\nu^{(n)}\,|\,\|f(x)-F_\nu(f,\ x)\|_C+(n-\nu)\,|\,\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}\,|\,\|f(x)-$$

$$-V_{n,\,n-\nu-1}(f,\ x)\|_C+\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|\,\|T_{\nu+2}(x)-f(x)\|_C+$$

$$+\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|\,\|N_{n,\,n-k-1}(f-T_{\nu+2},\ x)\|_C+$$

$$+(n-\nu-1)\,|\,\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}\,|\,\|M_{n,\,n-\nu-2}(f-T_{\nu+2},\ x)\|_C+$$

$$+\sum_{k=\nu+2}^{n-1}(n-k)\,|\,\Delta\lambda_k^{(n)}\,|\,\|[M_{n,\,n-k-1}(f-T_{\nu+2},\ x)-M_{n,\,n-k}(f-T_{\nu+2},\ x)]\|_C+$$

$$+\sum_{k=\nu+3}^{n}|\,\lambda_k^{(n)}\,|\,\|[M_{n,\,n-k}(f-T_{\nu+2},\ x)-M_{n,\,n-k+1}(f-T_{\nu+2},\ x)]\|_C+$$

$$+|\,\lambda_{\nu+2}\,|\,\|M_{n,\,n-\nu-2}(f-T_{\nu+2},\ x)\|_C\,. \tag{10}$$

Из (III) вытекает:

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}(k+1)\,|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|\,\|f(x)-F_k(f,\ x)\|_C+$$

$$+(\nu+1)\,|\,\Delta\lambda_\nu^{(n)}\,|\,\|f(x)-F_\nu(f,\ x)\|_C\leqslant$$

$$\leqslant A_1\sum_{k=0}^{\nu-1}|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|\sum_{i=0}^{k}E_i(f)+A_1\,|\,\Delta\lambda_\nu^{(n)}\,|\sum_{i=0}^{\nu}E_i(f)=$$

$$=A_1\left\{\sum_{k=0}^{\nu-1}E_k(f)\sum_{i=k}^{\nu-1}|\,\Delta^2\lambda_k^{(n)}\,|+|\,\Delta\lambda_\nu^{(n)}\,|\sum_{i=0}^{\nu}E_i(f)\right\}. \tag{11}$$

Приведем теперь следующие оценки и соотношения, содержащиеся в работе А. В. Ефимова [2], которые используются нами в дальнейшем:

$$\frac{1}{\pi(n-k+1)}\int\limits_{\frac{2\pi}{n-k+2}}^{\pi}\left|\frac{\sin\dfrac{n+k+1}{2}x\sin\dfrac{n-k+1}{2}x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\right|dx\leqslant A_2 \tag{12}$$

равномерно относительно n и $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,n$;

$$\frac{1}{\pi(n-k+1)}\int\limits_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{n+k+1}{2}x\sin\frac{n-k+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}\right|dx \leqslant A_3, \tag{13}$$

если $k=\nu-1,\ \nu,\ \nu+1,\ \nu+2$;

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n-k+3}}\left|\frac{\sin\frac{n+k+1}{2}\sin\frac{n-k+1}{2}x}{(n-k+1)\sin^2\frac{x}{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\frac{n+k}{2}x\sin\frac{n-k+2}{2}x}{(n-k+2)\sin^2\frac{x}{2}}\right|dx \leqslant \frac{A_4}{n-k+1}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\pi(n-k+1)}\int\limits_{\frac{2\pi}{n-k+3}}^{\frac{2\pi}{n-k+2}}\left|\frac{\sin\frac{n+k+1}{2}x\sin\frac{n-k+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}\right|dx \leqslant \frac{A_5}{n-k+1} \tag{15}$$

равномерно относительно n;

$$(n-k+1)\,|\Delta\lambda_k^{(n)}| \leqslant |\lambda_k^{(n)}| + \sum_{i=k}^{n-1}(n-i)\,|\Delta^2\lambda_i^{(n)}| \tag{16}$$

для любого $k=\nu,\ \nu+1,\ldots,n$;

$$\sum_{k=\nu+2}^{n-1}|\Delta\lambda_k^{(n)}| \leqslant |\lambda_{\nu+2}^{(n)}| + 2\sum_{k=\nu+2}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|. \tag{17}$$

Из (13) и (16) получаем:

$$(n-\nu)\,|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}|\,\|f(x)-V_{n,n-\nu-1}(f,x)\|_C = (n-\nu)\,|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}|\,\|f(x)-T_{\nu+1}(x)+$$

$$+V_{n,n-\nu-1}(T_{\nu+1}-f,x)\|_C \leqslant A_4'(n-\nu)\,|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}|\,E_{\nu+1}(f) \leqslant A_4'\Big\{|\lambda_{\nu+1}^{(n)}|+$$

$$+\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\Big\}E_\nu(f); \tag{18}$$

$$(n-\nu-1)\,|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}|\,\|M_{n,n-\nu-2}(f-T_{\nu+2},x)\|_C \leqslant A_3(n-$$

$$-\nu-1)\,|\Delta\lambda_{\nu+1}^{(n)}|\,E_{\nu+2}(f) \leqslant A_3\Big\{|\lambda_{\nu+1}^{(n)}|+\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\Big\}E_{\nu+2}(f); \tag{19}$$

$$|\lambda_{\nu+2}^{(n)}|\,\|M_{n,n-\nu-2}(f-T_{\nu+2},x)\|_C \leqslant A_3\,|\lambda_{\nu+2}^{(n)}|\,E_{\nu+2}(f). \tag{20}$$

Далее имеем:

$$\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\,\|T_{\nu+2}(x)-f(x)\|_C = \sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\,E_{\nu+2}(f). \tag{21}$$

Учитывая (12), будем иметь.

$$\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\,\|N_{n,n-k-1}(f-T_{\nu+2},x)\|_C\leqslant A_2\sum_{k=\nu+1}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|E_{\nu+2}(f). \tag{22}$$

Из (14) — (17), обозначая $\max(A_4, A_5)$ через A_6, получаем:

$$\sum_{k=\nu+2}^{n-1}(n-k)\,|\Delta\lambda_k^{(n)}|\,\|[M_{n,n-k-1}(f-T_{\nu+2},x)-M_{n,n-k}(f-T_{\nu+2},x)]\|_C\leqslant$$

$$\leqslant A_6\sum_{k=\nu+2}^{n-1}\frac{n-k}{n-k+1}\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\,E_{\nu+2}(f)\leqslant A_6\sum_{k=\nu+2}^{n-1}|\Delta\lambda_k^{(n)}|\,E_{\nu+2}(f)\leqslant$$

$$\leqslant A_6\left\{|\lambda_{\nu+2}^{(n)}|+2\sum_{k=\nu+2}^{n-1}(n-k)\,|\Delta^2\lambda_k^{(n)}|\right\}E_{\nu+2}(f). \tag{23}$$

Учитывая (14) и (15), имеем:

$$\sum_{k=\nu+3}^{n}|\lambda_k^{(n)}|\,\|[M_{n,n-k}(f-T_{\nu+2},x)-M_{n,n-k+1}(f-T_{\nu+2},x)]\|_C\leqslant$$

$$\leqslant A_6\sum_{k=\nu+3}^{n}\frac{|\lambda_k^{(n)}|}{n-k+1}\,E_{\nu+2}(f). \tag{24}$$

Таким образом, из (11) и (18) — (24) следует неравенство (1).

Теорема доказана.

Покажем теперь, что наше неравенство (1) является более точным, чем неравенство М. Ф. Тимана (IV). В самом деле, если $E_k(f)=\mathrm{const}$, то из неравенства (1) вытекает неравенство А. В. Ефимова ([2], стр. 745) для нормы оператора $U_n(f,x;\Lambda)$, которое не может быть получено из неравенства (IV).

Далее воспользуемся примером матрицы Λ, приведенной А. В. Ефимовым в РЖ «Математика», №8, 1963 г.

Пусть $\lambda_0=1$, $\lambda_1=1$, $\lambda_k=1-\dfrac{k-1}{n}$ при $k=2,3,\ldots,n+1$. Неравенство (1) дает оценку

$$\|f(x)-U_n(f,x;\Lambda)\|_C\leqslant A\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\nu-1}E_k(f).$$

Если рассмотрим любую функцию у которой ряд $\Sigma E_k(f)$ сходится, то будем иметь

$$\|f(x)-U_n(f,x;\Lambda)\|_C=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

а из неравенства М. Ф. Тимана (IV) в этом случае мы можем получить только оценку

$$\|f(x)-U_n(f,x;\Lambda)\|_C\leqslant A.$$

Заметим также, что если положить $\lambda_k^{(n)}=1$ $(k=0,1,\ldots,n)$, то для всех функций, у которых $E_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)\leqslant A\cdot E_n(f)$, из нашего неравенства (1) мы получаем неравенство Лебега (I).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. J. La Vallée Poussin, a) Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre douné, Compt. rendus, 166, 1918, b) Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

2. А. В. Ефимов, О линейных методах суммирования рядов Фурье, Изв. АН СССР, т. 24, 1960.

3. Р. Н. Ковальчук, Об одной задаче С. Б. Стечкина, «Вопр. матем. физ. и теор. функц.», Изд-во АН УССР, К., 1963.

4. H. Lebesque, Sur les integrales singulières, Ann. de Toulouse, I, 1909.

5. С. Б. Стечкин, О приближении периодических функций суммами Фейера, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LXII, 1961.

6. М. Ф. Тиман, Некоторые линейные процессы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение, ДАН СССР, т. 145, № 4, 1962.

Поступила 10.V 1963 г.
Киев