Об одном классе функционалов, интегрируемых по неположительным распределениям

Ю. Л. Далецкий, В. И. Ладохин

Пусть Ω — пространство ограниченных векторных функций $x(t)$ со значениями из евклидова пространства R_s, определенных на $[0, T]$ и удовлетворяющих условиям $x(0) = 0, x(T) = X$. Каждое разбиение q промежутка $[0, T]$ точками $0 < t_1 < \ldots < t_n < T$ порождает отображение пространства Ω на конечномерное пространство R_q, состоящее из векторов вида $x_q(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_k = x(t_k)$. Под $x_q(t)$ будем понимать ступенчатую функцию $x_q(t) = x_k$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Распределением ν_q в R_q назовем вполне аддитивную функцию множеств, заданную на борелевском поле, необязательно неотрицательную, но имеющую ограниченную вариацию. Систему ν заданных во всех пространствах R_q распределений ν_q, согласованных между собой в обычном смысле, назовем распределением в Ω (квазимерой).

Пусть $F[x, (t)]$ — функционал в Ω, определенный, по крайней мере, на ступенчатых функциях с конечным числом скачков. Он порождает функционал $F_q(x_1, \ldots, x_n) = F_q[x(t)] = F[x_q(t)]$ в R_q. Назовем средним функционала F по распределению ν величину $M_\nu F = \lim\limits_q M_{\nu_q} F_q$, где $M_{\nu_q} F_q = \int\limits_{R_q} F_q(x_1, \ldots, x_n)\, d\nu_q(x)$.

Распределение ν может быть построено обычным способом по переходной функции, обладающей определенными свойствами, подобно тому, как в теории марковских случайных процессов мера строится по переходной вероятности (подробнее см. в [1]). В частности, в качестве такой переходной функции может быть взято фундаментальное решение задачи Коши или смешанной задачи для уравнения вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = L\left(t, x\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi, \tag{1}$$

где $L\left(t, x\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — эллиптический дифференциальный оператор в R_s.

В [1] для широкого класса распределений, порожденных уравнениями типа (1) с операторами $L\left(t, x\frac{\partial}{\partial x}\right)$, имеющими самосопряженную главную часть и достаточно гладкие коэффициенты, было доказано существование средних от функционалов вида $F[x(t)] = \exp \int_0^T V(x(t), t)\, dt$, где $V(x, t)$ — достаточно гладкая ограниченная функция.

Пусть $V_k(x, t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ — набор таких функций и z_k $(k=1,\ldots,m)$— комплексные переменные. Положим

$$\chi(z_1, \ldots, z_m) = M_\nu \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{m} z_k \int_0^T V_k(x(t), t)\, dt \right\},$$

$$\chi_q(z_1, \ldots, z_m) = M_{\nu_q} \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{m} z_k \int_0^T V_k(x_q(t), t)\, dt \right\}.$$

Тогда $\chi(z_1, \ldots, z_m) = \lim\limits_q \chi_q(z_1, \ldots, z_m)$, причем, уточняя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 4.3 в [1], можно показать, что эта сходимость равномерна в любой ограниченной области изменения $z_1, \ldots, z_m$. Из той же теоремы вытекает, что функции χ_q и χ являются целыми экспоненциального типа.

Рассмотрим теперь функции $y_k(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^T V_k(x_q(t), t) dt$ $(k=1,\ldots,m)$.

Они отображают пространство R_q в некоторое пространство R_m и индуцируют в нем распределение $\hat{\nu}_q$, для которого справедливо равенство

$$M_{\hat{\nu}_q} g = \int_{R_m} g(y_1, y_2, \ldots, y_m) d\hat{\nu}_q(y) = \int_{R_q} g\left(\int_0^T V_1(x_q(t), t)\, dt, \ldots, \int_0^T V_m(x_q(t) t)\, dt \right) d\nu_q(x),$$

если только среднее $M_{\hat{\nu}_q} g$ существует. Поэтому среднее $M_\nu \Phi$ функционала

$$\Phi[x(t)] = g\left(\int_0^T V_1(x(t), t)\, dt, \ldots, \int_0^T V_m(x(t), t)\, dt \right), \tag{2}$$

если только оно существует, представимо в виде

$$M_\nu \Phi = \lim_q M_{\hat{\nu}_q} g. \tag{3}$$

Заметим, что распределение $\hat{\nu}_q$ сосредоточено на области значений функций y_k $(k = 1, \ldots, m)$ и потому финитно.

Пусть $g(y_1, \ldots, y_m)$ — целая функция экспоненциального типа. Ее преобразование Фурье как функционала над пространством K основных функций есть некоторая вполне аддитивная комплексная мера $\mu_g(z)$, сосредоточенная в ограниченной области изменения комплексных переменных $z_1, \ldots, z_m$, [2]. Аналогичную меру для функции $\chi(-z_1, \ldots, -z_m)$ обозначим через $\mu_\chi(y)$. Путем предельного перехода нетрудно вывести формулы

$$\int_{R_m} g(y_1, \ldots, y_m)\, d\hat{\nu}_q(y) = \int_{R_m} \chi_q(z_1, \ldots, z_m)\, d\mu_g(z) \tag{4}$$

и

$$\int_{R_m} g(y_1, \ldots, y_m)\, d\mu_\chi(y) = \int_{R_m} \chi(z_1, \ldots, z_m)\, d\mu_g(z) = \lim_q \int_{R_m} \chi_q(z_1, \ldots, z_m) d\mu_g(z). \tag{5}$$

Сопоставляя их с формулой (3) и проделывая предельный переход от целых функций к произвольным аналитическим в области, содержащей носитель Γ меры μ_χ, получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть ν — распределение в Ω, порожденное фундаментальным решением задачи Коши (или смешанной задачи с однородными граничными условиями) для уравнения* (1). *Пусть $V_k(x, t)$ $(k=1, \ldots, m)$ — достаточно гладкие ограниченные функции.*

Существует комплексная вполне аддитивная мера χ, сосредоточенная в ограниченной области Γ изменения комплексных переменных $y_1, \ldots, y_m$, такая, что при любой аналитической в области, содержащей Γ, функции $g(y_1, \ldots, y_m)$ среднее функционала (2) *существует и выражается формулой*

$$M_\nu \Phi = \int_\Gamma g(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, d\mu_\chi(y).$$

Если $g_n(y_1, \ldots, y_m)$ последовательность аналитических в такой области функций, равномерно сходящаяся в ней к $g(y_1, \ldots, y_m)$, то

$$M_\nu \Phi = \lim_{n\to\infty} M_\nu \Phi_n.$$

В качестве примера можно вывести формулу

$$M_\nu \exp \int_0^T V(x(t), t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M_\nu \left[\int_0^T V(x(t), t)\, dt \right]^k,$$

полученную в [3] другим способом для случая, когда $L = (-1)^{p+1} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2 p}$.

Аналогичные результаты можно получить для уравнений типа уравнения Шредингера.

Заметим, что в частном случае, когда $V_k(x, t)$ линейны относительно x, можно провести рассуждения, не предполагая заранее существования $\chi(z_1, \ldots, z_m)$, и отбросить при этом ограничения на гладкость функции $g(y_1, \ldots, y_m)$. См. по этому поводу [4], где рассмотрены функционалы вида

$$g\left(\int_0^T \alpha_1(t)\, dx(t), \ldots, \int_0^T \alpha_m(t)\, dx(t) \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Далецкий, Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями, Усп. матем. наук. 17, № 5, 1962, 3—115.

2. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 2, Физматгиз, 1958.

3. В. И. Ладохин, О неположительных распределениях, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 122, кн. 4, 1962, 53—64.

4. В. И. Ладохин, Вычисление континуальных интегралов от функционалов $\Phi(\int_0^T \alpha_1(t)\, dx(t), \ldots, \int_0^T \alpha_n(t)\, dx(t))$, Усп. матем. наук, в печати.

Поступила 3.VI 1963 г.

Киев—Казань