

Одна обратная краевая задача теории фильтрации

Н. Б. Ильинский, И. К. Брамааткина

В работе излагается метод построения и дальнейшего фильтрационного расчета подземного контура гидротехнического сооружения по заданной эпюре напоров в случае разной высоты бьефов при неограниченной и

ограниченной глубине водопроницаемого слоя¹. Приводятся два числовых примера.

Указанный метод разработан на основе теории обратных краевых задач, примененной впервые к вопросам фильтрационного расчета М. Т. Нужиным [1].

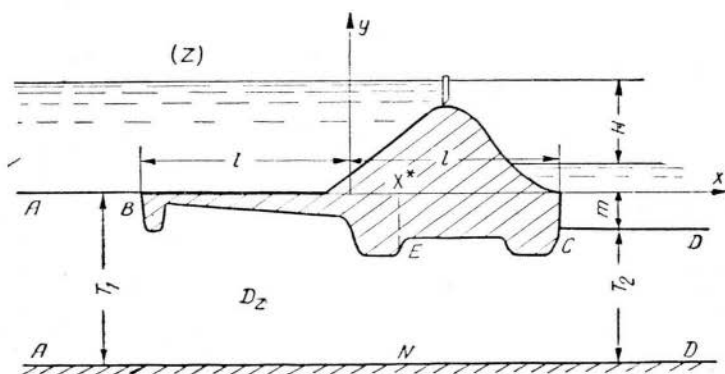


Рис. 1.

1. Требуется построить подземный контур гидросооружения по заданной эпюре напоров

$$h = f(x), \quad -l \leq x \leq l, \quad (1.1)$$

и провести фильтрационный расчет основания. Глубина водопроницаемого слоя предполагается неограниченной; $f(x)$ — однозначная монотонно убывающая функция, причем $f^{-1}(h)$ удовлетворяет условию Гельдера; $2l$ — ширина флютбета, m — разность высоты бьефов (рис. 1)².

Решение будем искать при следующих предположениях: движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси, жидкость несжимаема, грунт основания однороден, течение установившееся, подземный контур абсолютно водонепроницаем.

Полагая $h_{AB} = \frac{H}{2}$ и $\psi_{BC} = 0$, получаем $h_{CD} = -\frac{H}{2}$, где H — действующий на гидросооружение напор, ψ — функция тока.

В плоскости комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$, где $\varphi = -kh$, области фильтрации D_z (см. рис. 1) будет соответствовать полуплоскость D_ω (рис. 2). Напор H и коэффициент фильтрации k известны заранее.

С помощью функции

$$\omega = \frac{kH}{\pi} \arcsin \zeta \quad (1.2)$$

конформно отобразим область D_ω на нижнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta < 0$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. На участке $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$ получим

$$h = -\frac{H}{\pi} \arcsin \xi. \quad (1.3)$$

Из соотношений (1.1) и (1.3) найдем зависимость

$$x = x(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (1.4)$$

¹ Случай одинаковой высоты бьефов разобран в работе [2].

² Изображенный на рис. 1 водоупор относится к 2.

являющуюся $\text{Re} z(\zeta)$ на участке $[-1, 1]$ вещественной оси ξ . На участке $-\infty < \xi \leq -1$, $\eta = 0$ имеем $\text{Im} z = 0$, на участке $1 \leq \xi < \infty$, $\eta = 0$ $\text{Im} z = -m$. Аналитическая функция $z(\zeta)$ регулярна всюду в области $\text{Im} \zeta < 0$, за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет простой полюс, а мнимая часть ее терпит в этой точке скачок первого рода на величину m .

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию вида

$$\omega(\zeta) = z(\zeta) - A\sqrt{\zeta^2 - 1} + \frac{im}{\pi} \arcsin \zeta + \frac{im}{2}, \quad (1.5)$$

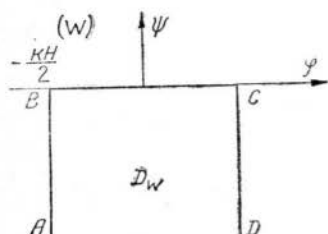


Рис. 2.

где A — некоторая произвольная вещественная постоянная, не равная 0. Аналитическая в области $\text{Im} \zeta < 0$ функция $\omega(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow \infty$ стремится к некоторому действительному пределу $\omega(\infty)$. $\text{Re} \omega = x(\xi)$ на участке $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$. На участках $-\infty < \xi \leq -1$ и $1 \leq \xi < \infty$, $\eta = 0$ имеем $\text{Im} \omega = 0$.

Таким образом, определение функции $\omega(\zeta)$ свелось к решению прямой смешанной краевой задачи для нижней полуплоскости при условиях, когда может быть использована известная формула Келдыша — Седова [3]. Применяя эту формулу, запишем:

$$\omega(\zeta) = -\frac{1}{\pi i g(\zeta)} \left[\int_{-1}^1 \frac{x(\tau) g(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau - \pi i \omega(\infty) \right], \quad (1.6)$$

где $g(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}}$. Из условия ограниченности функции $\omega(\zeta)$ в точке $\zeta = 1$ определим $\omega(\infty)$ и, подставляя в (1.6), получим:

$$\omega(\zeta) = \frac{i\sqrt{1 - \zeta^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - \zeta)\sqrt{1 - \tau^2}}.$$

Функция $z(\zeta)$, осуществляющая конформное отображение области D_2 на $\text{Im} \zeta < 0$, примет вид

$$z(\zeta) = \frac{i\sqrt{1 - \zeta^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - \zeta)\sqrt{1 - \tau^2}} + A\sqrt{\zeta^2 - 1} - \frac{im}{\pi} \arcsin \zeta - \frac{im}{2}. \quad (1.7)$$

Отделяя мнимую часть предельного значения этой функции на отрезке $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$, найдем:

$$y(\xi) = u(\xi) - \frac{m}{\pi} \arcsin \xi - \frac{m}{2} - A\sqrt{1 - \xi^2}, \quad (1.8)$$

где

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - \xi)\sqrt{1 - \tau^2}}. \quad (1.9)$$

Соотношения (1.4) и (1.8) представляют параметрические уравнения искомого подземного контура гидросооружения.

Таким образом, в рассматриваемом случае заданной эюре напоров (1.1) отвечает семейство подземных контуров (в соотношение (1.8) входит

произвольный параметр A , влияющий на величину заглубления флютбета). Этим фактом удобно воспользоваться для подбора наиболее желательной формы контура одним из следующих двух способов.

1. Пусть требуется построить подземный контур таким образом, чтобы максимальный выходной градиент по дну нижнего бьефа CD (см. рис. 1) принимал наперед заданное значение M . Так как в нашем случае $\max I_{CD} = I_C$, где I_C — гидравлический градиент в точке C , то $M = I_C$. Величина I_C может назначаться, например, из условий проектирования обратного фильтра, покрывающего дно нижнего бьефа [4, стр. 86].

Учитывая, что

$$I_x - iI_y = \frac{1}{k} \frac{dw}{dz}$$

и используя (1.2) и (1.7), на линии дна нижнего бьефа найдем:

$$I_{CD} = -\frac{H}{\pi} \left(\frac{\tilde{d}u}{d\xi} \sqrt{\xi^2 - 1} + \frac{m}{\pi} - A\xi \right)^{-1}, \quad (1.10)$$

где $1 < \xi < \infty$,

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - \xi) \sqrt{1 - \tau^2}}. \quad (1.11)$$

Интегрируя выражение (1.11) по частям и дифференцируя затем по ξ , получим

$$\frac{\tilde{d}u}{d\xi} = -\frac{1}{\pi \sqrt{\xi^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau} \frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{\tau - \xi} d\tau.$$

Подставляя $\frac{\tilde{d}u}{d\xi}$ в формулу (1.10) и полагая $\xi = 1$, имеем:

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau} \sqrt{\frac{1 + \tau}{1 - \tau}} d\tau + \frac{1}{\pi} \left(m + \frac{H}{I_C} \right).$$

2. Задавая необходимое заглубление флютбета y^* в некоторой точке E подземного контура с выбранной абсциссой x^* (см. рис. 1), из соотношения (1.4) определим ξ^* , после чего постоянную A найдем по формуле

$$A = \frac{-1}{\sqrt{1 - \xi^{*2}}} \left[\frac{m}{2} + \frac{m}{\pi} \arcsin \xi^* + y^* - u(\xi^*) \right]. \quad (1.12)$$

Легко показать, что условия, наложенные из физических соображений на функцию напоров, обеспечивают построение подземного контура без самопересечений. Действительно, в этом случае функция $x(\xi)$, определяемая выражением (1.4), является монотонно возрастающей в интервале $-1 < \xi < 1$, следовательно, функция $z(\zeta)$ осуществляет однолистное конформное отображение области фильтрации на нижнюю полуплоскость.

Если мы потребуем, чтобы функция $f^{-1}(h)$ была однозначной и невозрастающей, то тем самым расширим класс возможных решений, дополнив его контурами с вертикальными участками.

Построив контур и установив зависимость $x(s)$, где s ($0 \leq s \leq L$) — дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки B (см. рис. 1) и L — длина контура, по (1.1) найдем распределение напоров по длине контура, $h = h(s)$. Тогда распределение скоростей фильтрации будет:

$$v = -k \frac{dh}{ds} \text{ — по контуру основания сооружения,}$$

$v = \frac{kH}{v(\xi) - m + \pi\xi A}$. $1 \ll \xi < \infty$ — по дну нижнего бьефа: здесь

$$v(\xi) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\xi} d\tau.$$

2. Рассмотрим случай ограниченной глубины водопроницаемого слоя. Задана эпюра напоров (1.1) и величина фильтрационного расхода Q . Требуется построить подземный контур (см. рис. 1).

В плоскости w области фильтрации будет соответствовать прямоугольник, который конформно отображим на $\text{Im } \zeta < 0$ с помощью функции

$$w = \frac{kH}{2K} F(\text{arc sin } \zeta, \lambda), \quad (2.1)$$

где $F(\text{arc sin } \zeta, \lambda)$ — эллиптический интеграл первого рода, K — полный эллиптический интеграл первого рода. Модуль λ определится из соотношения

$$\frac{K}{K'} = \frac{kH}{2Q}, \quad (2.2)$$

где K' — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$.

Из формулы (2.1) на участке $-1 \ll \xi \ll 1$, $\eta = 0$ имеем:

$$h = -\frac{H}{2K} F(\text{arc sin } \xi, \lambda). \quad (2.3)$$

Сопоставляя (1.1) и (2.3), находим:

$$x = x(\xi), \quad -1 \ll \xi \ll 1. \quad (2.4)$$

Для аналитической в области $\text{Im } \zeta < 0$ функции $\sigma(\zeta) = z(\zeta) + iT_1$ имеем: $\text{Im } \sigma = 0$ на участках $(-\infty, -\frac{1}{\lambda})$ и $(\frac{1}{\lambda}, \infty)$ оси ξ , $\text{Im } \sigma = T_1$ при $-\frac{1}{\lambda} < \xi < -1$ и $\text{Im } \sigma = T_2$ при $1 < \xi < \frac{1}{\lambda}$. На участке $[-1, 1]$ известна $\text{Re } \sigma = x(\xi)$.

Применяя формулу Келдыша — Седова, запишем:

$$\sigma(\zeta) = \frac{1}{\pi g(\zeta)} \left[i \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) g(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} - T_1 \int_{-\frac{1}{\lambda}}^{-1} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} - T_2 \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - \zeta} \right] + \frac{\sigma(\infty)}{g(\zeta)},$$

где $g(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+1}}$. Используя условие ограниченности $\sigma(\zeta)$ в окрестности $\zeta = 1$, получим:

$$z(\zeta) = \frac{i\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-\zeta)\sqrt{1-\tau^2}} - T_1 \int_{-\frac{1}{\lambda}}^{-1} \frac{d\tau}{(\tau-\zeta)\sqrt{\tau^2-1}} + \right. \\ \left. + T_2 \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{d\tau}{(\tau-\zeta)\sqrt{\tau^2-1}} \right] - iT_1. \quad (2.5)$$

Выделив мнимую часть при $\xi \rightarrow \xi$ на отрезке $-1 \leq \xi \leq 1$, $\eta = 0$ и вычислив интегралы, найдем:

$$y(\xi) = u(\xi) + \frac{1}{\pi} \left(T_2 \arcsin \frac{\xi - \lambda}{1 - \lambda \xi} - T_1 \arcsin \frac{\xi + \lambda}{1 + \lambda \xi} \right) - \frac{m}{2}, \quad (2.6)$$

где $m = T_1 - T_2$.

Искомый контур построим по формулам (2.4) и (2.6).

Дальнейший фильтрационный расчет проводится аналогично изложенному в работе [5], причем зависимость $x(\xi)$ при $1 < \xi < \frac{1}{\lambda}$ будет определяться формулой

$$x(\xi) = \frac{T_1 + T_2}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{1 - \lambda^2} + \lambda \sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{1 - \lambda^2} - \lambda \sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{m}{2\pi} \ln \frac{\xi \sqrt{1 - \lambda^2} - \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi \sqrt{1 - \lambda^2} + \sqrt{\xi^2 - 1}} - \tilde{u}(\xi).$$

Заметим, что если положить в выведенных выше формулах пунктов 1 и 2 $m = 0$, то получим решение задачи в случае одинаковой высоты бьефов.

3. При непосредственном построении подземного контура (как при $T = \infty$, так и при $T < \infty$) требуется находить значения функции $u(\xi)$, определяемой формулой (1.9). При принятых нами предположениях относительно $f(x)$ подынтегральная функция $x(\xi)$ на отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет условию Гельдера, следовательно, сингулярный интеграл (1.9) существует в смысле главного значения по Коши [6]. Так как при вычислении этого интеграла формулы механических квадратур для обычного риманова интеграла не применимы, поступим следующим образом.

Введем новые переменные $\xi = \cos \gamma$ и $\tau = \cos \theta$, тогда

$$u(\cos \gamma) = \frac{\sin \gamma}{\pi} \int_0^\pi \frac{\tilde{x}(\theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \gamma}, \quad (3.1)$$

где $\tilde{x}(\theta) = x(\cos \theta)$. Продолжая функцию $\tilde{x}(\theta)$, заданную на интервале $[0, \pi]$, четным образом на интервал $[\pi, 2\pi]$, представим $\tilde{x}(\theta)$ в виде четного тригонометрического интерполяционного полинома

$$\tilde{x}(\theta) = \sum_{n=0}^N a_n \cos n\theta, \quad (3.2)$$

где коэффициенты a_n определяются по известным формулам гармонического анализа (см., например, [7]).

Подставляя в (3.1) вместо $\tilde{x}(\theta)$ ряд (3.2) и учитывая равенство

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \gamma} = \pi \frac{\sin n\gamma}{\sin \gamma},$$

получаем формулу для приближенного вычисления сингулярного интеграла (1.9) в виде

$$u(\cos \gamma) = \sum_{n=1}^N a_n \sin n\gamma. \quad (3.3)$$

4. Рассмотрим примеры построения подземных контуров.

Пример 1. Заданная эпюра напоров изображена на рис. 3. Положим $k = H = 2l = 1$, $m = 0, 1$, $T = \infty$. Требуется построить подземный контур.

Запишем выражение (1.3) в виде

$$h = \frac{y}{\pi} - \frac{1}{2},$$

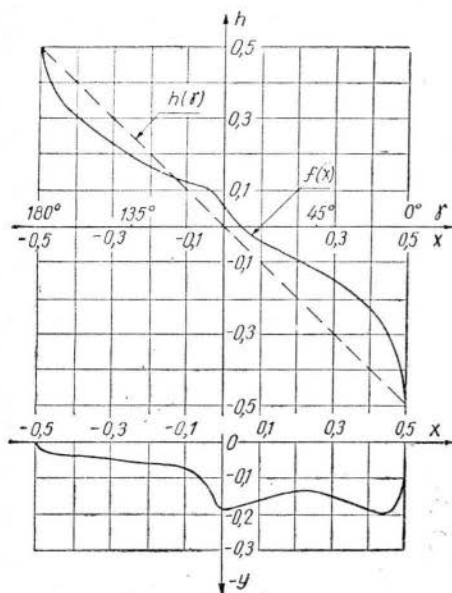


Рис. 3.

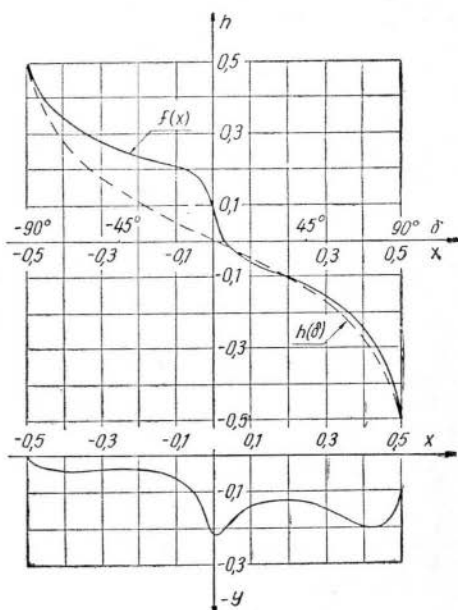


Рис. 4.

где $\cos \gamma = \xi$. Построив $h(\gamma)$ на рис. 3 и сравнив графически $f(x)$ и $h(\gamma)$, найдем зависимость $x(\gamma)$, которую представим в виде ряда (3.2). По формулам гармонического анализа [7]:

$$2Na_0 = \sum_{\alpha=0}^N s_{\alpha}, \quad Na_n = \sum_{\alpha=0}^N s_{\alpha} \cos n\gamma_{\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$2Na_N = \sum_{\alpha=0}^N (-1)^{\alpha} s_{\alpha}, \quad \text{где } \gamma_{\alpha} = \frac{\pi\alpha}{N}, \quad s_0 = x_0,$$

$$s_{\alpha} = 2x_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N-1, \quad s_N = x_N$$

вычислим коэффициенты a_n , после чего по формуле (3.3) найдем $u(\gamma)$. Пусть при $x^* = 0,042$ задано заглубление $y^* = -0,182$. Тогда по формуле (1.12) определим постоянную $A = 0,614$. Заменив в выражении (1.8) $\xi = \cos \gamma$ и подставив найденное значение A , вычислим $y(\gamma)$. По формулам $x = x(\gamma)$ и $y = y(\gamma)$ построим искомый подземный контур (см. рис.3).

Пример 2. Рассматривается случай ограниченной глубины водопроницаемого слоя. Эпюра напоров задана на рис. 4. Считаем $k = H = 2l = 1$, $T_1 = 0,5$, $T_2 = 0,4$, $m = 0, 1$, $Q = 0,246$.

Из соотношения (2.2) по таблицам (см., например, [8], стр. 582) находим $\lambda = 0,986$, $K = 3,198$. Формулу (2.3) запишем в виде

$$h(\delta) = -0,156 F(\delta, \beta),$$

где $\sin \delta = \xi$, $\sin \beta = \lambda$, $\beta = 80^\circ 24'$. Сравнивая графически $h(\delta)$ и $f(x)$, найдем $x(\delta)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$, или $x(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq \pi$, где $\xi = \cos \gamma$. Вычисляя коэффициенты a_n и определив $u(\gamma)$, по формуле (2.6), в которой предварительно заменим $\xi = \cos \gamma$, найдем $y(\gamma)$. По $x(\gamma)$ и $y(\gamma)$ построим искомый контур (см. рис. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Тумашев и М. Т. Нужин, Обратные краевые задачи, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 115, кн. 6, 1955.
2. Н. Б. Ильинский, Построение контура основания гидротехнического сооружения по распределению напора, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 118, кн. 2, 1958.
3. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
4. Р. Р. Чугаев, Проектирование и расчет подземного контура бетонных плотин, расположенных на нескальных основаниях, Техническая информация, Госэнергоиздат, М.—Л., 1956.
5. Н. Б. Ильинский, Определение формы и размеров подземного контура гидросооружения при конечной глубине водопроницаемого слоя, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 118, кн. 2, 1958.
6. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
7. Я. С. Безикович, Приближенные вычисления, Гостехиздат, М., 1931.
8. В. И. Аравин и С. Н. Нумеров, Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде, Гостехиздат, М., 1953.

Поступила 3. X 1960 г.

Казань