

## О решении задач свободной фильтрации методом последовательных приближений

*В. И. Лаврик*

Рассмотрим общую задачу установившейся фильтрации через земляную плотину без промежутка высачивания с произвольным наперед заданным напорным откосом.

Для конкретности рассмотрим случай глубокого залегания водоупора  $KM$ , когда можно положить  $T = \infty$ . Заданная область фильтрации  $z$  изображена на рисунке,  $a$ , где:  $L$  — ширина плотины,  $\alpha\lambda$  — угол, образованный касательной к линии напорного откоса  $AB$ , проведенной через точку  $B$ , и положительной осью координат. Для данной области фильтрации  $z$  в области Жуковского  $G$  (рисунок,  $b$ ), которая определяется равенством

$$G = z - i \frac{\omega}{\kappa} = z - i \bar{\omega}. \quad (1)$$

где  $\omega$  — комплексный потенциал,  $\kappa$  — коэффициент фильтрации, не определены кривая  $A'B'$  и угол  $\beta\lambda$ . Поэтому, используя «полуобратный» метод определения характеристической функции течения [1], построим итерационный процесс для решения прямой задачи фильтрации, когда для заданной области фильтрации  $z$  необходимо определить неизвестные фильтрационные характеристики. Именно такая задача встречается в практике расчета земляных плотин. Основная идея рассматриваемого здесь метода последовательных приближений состоит в том, что при каждом шаге

приближения  $k$  в области Жуковского определяется каким-то образом кривая  $A'B'$  и угол  $\beta\lambda$ , а затем для области  $G$ , согласно равенству (1), строится соответствующая область фильтрации  $z$ . Рассмотрим, каким образом необходимо определить кривую  $A'B'$ , чтобы с каждым шагом приближения решение стремилось к истинному.

Обозначим линию напорного откоса  $AB$ , которая обычно задается графически или дискретным рядом точек  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N, \dots$ , через  $Z(z_1, z_2, z_3, \dots, z_N, \dots)$  или просто через  $Z$  и будем считать всегда, что она определена  $N$  координатами  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$ , а на бесконечности асимптотически приближается к прямой  $y = \frac{y_1}{x_1}x$ , где  $x_1$  и  $y_1$  — координаты точки  $z_1$ . Кривую  $A'B'$  в области Жуковского  $G$  обозначим через  $G(g_1, g_2, g_3, \dots, g_N, \dots)$  или через  $G$  и будем считать, что она определена соответствующими  $N$  образами точек, определяющих линию напорного откоса, а на бесконечности асимптотически приближается к прямой  $v = \frac{v_1}{u_1}u$ , где  $u_1, v_1$  — координаты точки  $g_1$ .

Зависимость между кривыми  $Z$  и  $G$  определяется равенством (1), которое после учета краевого условия  $\omega|_{AB} = i\psi$  примет вид

$$G = Z + \bar{\psi}. \quad (2)$$

Определим в области Жуковского  $G_0$  кривую  $A'B'$  равенством

$$G_0(g_1^{(0)}, g_2^{(0)}, g_3^{(0)}, \dots, g_N^{(0)}, \dots) = Z(z_1, z_2, z_3, \dots, z_N, \dots)$$

или

$$G_0 = Z. \quad (3)$$

Если область комплексного потенциала  $\omega_0$  отобразим на область Жуковского  $G_0$  функцией

$$G_0 = f_0(\omega_0), \quad (4)$$

то, согласно (2), линия напорного откоса определится равенством

$$Z_0 = f_0(i\psi_0) - \bar{\psi}_0. \quad (5)$$

Определим отклонение линии  $Z_0$  от заданной линии напорного откоса  $Z$ :

$$\Delta Z_0 = Z - Z_0 = f_0(i\psi_0) - f_0(i\psi_0) + \bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_0$$

и построим новую область Жуковского  $G_1$ , в которой кривая  $A'B'$  (см. рисунок, а, б) определится следующим равенством:

$$G_1 = G_0 + \Delta Z_0. \quad (6)$$

Область комплексного потенциала отобразим на новую область Жуковского  $G_1$  функцией

$$G_1 = f_1(\omega_1),$$

после чего линия напорного откоса определится следующим равенством:

$$Z_1 = f_1(i\psi_1) - \bar{\psi}_1. \quad (7)$$

Новая кривая  $Z_1$  расположена ближе к заданной линии напорного откоса  $Z$ , чем кривая  $Z_0$ , так как при вдавливании кривой  $G_0$  кривая  $Z_0$  также будет вдавливаться [4], и, следовательно,  $|\Delta Z_1| < |\Delta Z_0|$ .

Дальше процесс отыскания истинной кривой  $G$  повторяется. После  $k$  шагов кривая  $A'B'$  в области Жуковского определится равенством

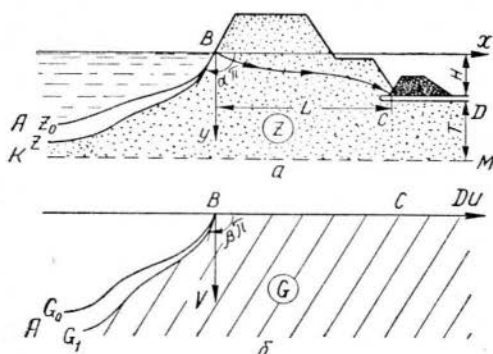
$$G_k = f_{k-1}(i\psi_{k-1}) + \Delta Z_{k-1}, \quad (8)$$

а соответствующая линия напорного откоса  $AB$  после отображения области  $\omega_k$  на область  $G_k$  — равенством

$$Z_k = f_k(i\psi_k) - \bar{\psi}_k, \quad (9)$$

где

$$\psi_k = f_k^{-1} [G_k (g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, g_3^{(k)}, \dots, g_N^{(k)}, \dots)].$$



При  $k \rightarrow \infty$ ,  $\Delta Z_k \rightarrow 0$ . Следовательно, можно записать:

$$Z \rightarrow Z_k = f_k(i\psi_k) - \bar{\psi}_k.$$

Из всего изложенного выше сделаем следующий важный вывод: если найдено рассмотренным выше итерационным методом преобразование  $f_k(\omega_k)$ , то решение прямой задачи фильтрации можно записать в виде

$$z \approx f_k(\omega_k) + i\bar{\omega}_k. \quad (10)$$

Определим явное выражение функции (4), отображающей область комплексного потенциала — нижнюю вертикальную полуполосу шириной  $\pi H$  — на область Жуковского  $G$ . Для этого устраним единственную в области  $G$  угловую точку  $B'$  преобразованием

$$W_1 = \left( \frac{1}{L} G \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (11)$$

Заметим, что функция (11) многозначная, а поэтому необходимо пользоваться одной ветвью этой функции, которая определяется из соответствия граничных точек  $A, B, C$  в отображающих областях  $G$  и  $W_1$ .

Область  $W_1$  отобразим на внешность некоторой области  $W_2$ , ограниченной гладкой кривой:

$$W_2 = \frac{iW_1 - 1}{i - W_1}. \quad (12)$$

Обратив функции (11) и (12), найдем преобразование, отображающее область  $W_2$  на область Жуковского  $G$ :

$$G = L \left( \frac{1 + iW_2}{W_2 + i} \right)^{\beta}. \quad (13)$$

Теперь можно отобразить область комплексного потенциала  $\omega$  на область  $W_2$ . Здесь основную роль играет отображение единичного круга  $\zeta$  на

область  $W_2$ , которое осуществляется функцией вида

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \zeta^n, \quad (14)$$

где коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$  определяются для каждой конкретной области  $W_2$  методом тригонометрического интерполирования [5]. Область комплексного потенциала  $\omega$  отображаем на единичный круг  $\zeta$  следующим преобразованием

$$\zeta = \frac{i \left[ (1 + \lambda) - (1 - \lambda) \cos \frac{\pi\omega}{\kappa H} \right] - 2}{2i - \left[ (1 + \lambda) - (1 - \lambda) \cos \frac{\pi\omega}{\kappa H} \right]}, \quad (15)$$

где

$$\lambda = \frac{2a}{a^2 + (1 + b)^2}$$

( $a$  и  $b$  — координаты точки  $B$  в плоскости  $\zeta$ ).

Учитывая выражения (1), (12), (14) и (15), найдем преобразование, отображающее область комплексного потенциала  $\omega_k$  на область Жуковского  $G_k$ , зная которое, можем записать уравнение (10) в виде

$$z = i \frac{\omega_k}{\kappa} + L \left[ \frac{1 + i \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \zeta^n}{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \zeta^n + i} \right]^{\beta}, \quad (16)$$

где переменная  $\zeta$  определяется равенством (15), в котором  $\omega$  необходимо заменить на  $\omega_k$ .

В качестве примера в таблице приведены координаты кривой депрессии, вычисленные при втором шаге методом последовательных приближений, когда в условии задачи известно:

$$\frac{L}{H} = 10; \quad \beta_1 \approx \beta_0 = \alpha = \frac{3}{4}.$$

$\frac{x^{(1)}}{H}$	0	2,350	4,810	7,210	10
$\frac{y^{(1)}}{H}$	0	0,243	0,416	0,592	1

Вычисления производились с точностью до трех десятичных знаков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Аравин и С. Н. Нумеров, Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде, Гостехиздат, М., 1953.
2. В. И. Лаврик, Применение метода мажорантных областей для определения фильтрационного расхода при неизвестной глубине залегания водоупора, УМЖ, т. XIV, № 1, 1962.
3. Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Фильтрация в однородной среде, Изд-во «Советская наука», М., 1949.
4. Г. Н. Положий, Вариационные теоремы и метод мажорантных областей, УМЖ, т. V, № 3, 1954.

5. П. Ф. Фильчаков, О конформном отображении заданных односвязных, однолистных областей при помощи электромоделирования, Тр. Четвертой межвузовской научной конференции по применению физического и математического моделирования, Изд-во АН СССР, М., 1962.

Поступила 29.V 1963 г.

Киев