Основные краевые задачи теории потенциала для областей со щелями

М. Д. Мартыненко

1. Одним из методов решения краевых задач теории гармонических функций является приведение их к интегральным уравнениям на основе потенциального представления решения. Таким методом можно решать задачи Дирихле и Неймана для областей, ограниченных замкнутыми поверхностями, представляя решение в виде потенциалов двойного и простого слоев, расположенных на граничных поверхностях. Легко видеть, что если граничные значения заданы на незамкнутых поверхностях, то обычными потенциалами двойного и простого слоев нельзя решать задачи Дирихле и Неймана. Поэтому естественно воспользоваться многозначными потенциалами при решении краевых задач теории потенциала для областей со «щелями». Впервые ввел в рассмотрение многозначные потенциалы А. Зоммерфельд [1]. В этой же работе он ввел понятие пространства Римана по аналогии с поверхностями Римана и построил функцию Грина для одного частного случая. Затем Диксон [2] доказал методом Шварца существование функции Грина в пространстве Римана.

В данной работе рассматривается для простоты случай, когда область — все трехмерное пространство с разрезом вдоль незамкнутой поверхности Ляпунова с гладкой границей. Опираясь на доказанное Диксоном существование функции Грина, мы приводим задачи Дирихле и Неймана для этой области к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказываем их разрешимость по первой теореме Фредгольма.

2. При построении многозначных потенциалов мы будем пользоваться пространствами Римана и функциями Грина этих пространств. Такое риманово пространство строится следующим образом: если потенциал в обычном пространстве n-значен, тогда возьмем n экземпляров обыкновенного пространства и отметим в них линии ветвления нашего потенциала. Затем натягиваем между линиями ветвления поверхности любого вида и разрезаем каждый пространственный экземпляр вдоль этой поверхности. Так возникающие верхние $(+)$ и нижние $(-)$ части разрезающих поверхностей склеиваем друг с другом аналогично тому, как это делается в теории римановых поверхностей, и получаем n-кратное пространство Римана. Функцией Грина пространства Римана называется функция двух точек x и y со следующими свойствами:

1) она непрерывна и ограничена всюду в пространстве Римана за исключением точки $x = y$, в которой она имеет полюс типа $\dfrac{1}{|x-y|}$;

2) удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в пространстве, за исключением точки $x = y$ и линии ветвления;

3) обращается в нуль в бесконечно удаленной точке.

Пусть S — незамкнутая поверхность Ляпунова с гладкой границей Γ. Построим двойное пространство Римана с линией ветвления Γ и обозначим через $\omega(x, y)$ функцию Грина для этого пространства. Обозначим через I обычное трехмерное пространство, а через II — пространство, лежащее над ним в римановом пространстве; тогда все наше двойное риманово пространство есть объединение $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$.

Выберем на S определенное направление нормали и примем его за положительное. Рассмотрим следующие выражения:

$$v_+(x) = \int_S \omega(y_+, x)\varphi_+(y)\,d_yS, \qquad v_-(x) = \int_S \omega(y_-, x)\varphi_-(y)\,d_yS,$$
$$w_+(x) = \int_S \frac{\partial\omega(x, y_+)}{\partial\nu}\varphi_+(y)\,d_yS, \qquad w_-(x) = \int_S \frac{\partial\omega(x, y_-)}{\partial\nu}\varphi_-(y)\,d_yS. \tag{1}$$

Здесь $\omega(x, y_+)$ и $\omega(x, y_-)$ обозначают предельные значения $\omega(x, y)$ при y, стремящемся к поверхности S по направлению положительной и отрицательной нормали из первого пространства, а производные берутся по направлению положительной нормали. Так как функция $\omega(x, y)$ непрерывна и ограничена всюду в пространстве Римана за исключением точки $x = y$, где она имеет особенность типа $\frac{1}{|x-y|}$, то функции $v_+(x)$, $v_-(x)$, $w_+(x)$, $w_-(x)$ непрерывны всюду в пространстве $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$, а при приближении к поверхности S будут иметь место следующие равенства:

$$\left[\frac{\partial v_+(x)}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{I}} = -2\pi\varphi_+(x) + \int_S \varphi_+(y)\frac{\partial\omega(y_+, x_+)}{\partial\nu(x)}\,d_yS,$$
$$\left[\frac{\partial v_+(x)}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{II}} = 2\pi\varphi_+(x) + \int_S \varphi_+(y)\frac{\partial\omega(y_+, x_+)}{\partial\nu(x)}\,d_yS,$$
$$\left[\frac{\partial v_+(x)}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{I}} = \left[\frac{\partial v_+(x)}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{II}} = \int_S \varphi_+(y)\frac{\partial\omega(y_+, x_-)}{\partial\nu(x)}\,d_yS,$$
$$\left[\frac{\partial v_-(x)}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{I}} = \left[\frac{\partial v_-(x)}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{II}} = \int_S \varphi_-(y)\frac{\partial\omega(y_-, x_+)}{\partial\nu(x)}\,d_yS, \tag{2}$$
$$\left[\frac{\partial v_-(x)}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{I}} = 2\pi\varphi_-(x) + \int_S \varphi_-(y)\frac{\partial\omega(y_-, x_-)}{\partial\nu(x)}\,d_yS,$$
$$\left[\frac{\partial v_-(x)}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{II}} = -2\pi\varphi_-(x) + \int_S \varphi_-(y)\frac{\partial\omega(y_-, x_-)}{\partial\nu}\,d_yS;$$

$$[w_+(x)]_+^{\mathrm{I}} = 2\pi\varphi_+(x) + \int_S \varphi_+(y)\frac{\partial\omega(x_+, y_+)}{\partial\nu}\,d_yS,$$
$$[w_+(x)]_-^{\mathrm{II}} = -2\pi\varphi_+(x) + \int_S \varphi_+(y)\frac{\partial\omega(x_+, y_+)}{\partial\nu}\,d_yS,$$
$$[w_+(x)]_-^{\mathrm{I}} = [w_+(x)]_+^{\mathrm{II}} = \int_S \varphi_+(y)\frac{\partial\omega(x_-, y_+)}{\partial\nu}\,d_yS, \tag{3}$$
$$[w_-(x)]_+^{\mathrm{I}} = [w_-(x)]_-^{\mathrm{II}} = \int_S \varphi_-(y)\frac{\partial\omega(x_+, y_-)}{\partial\nu}\,d_ys,$$

$$[w_-(x)]^{\mathrm{I}}_- = -2\pi\varphi_-(x) + \int_S \varphi_-(y)\frac{\partial\omega(x_-, y_-)}{\partial\nu}\,d_yS,$$

$$[w_-(x)]^{\mathrm{II}}_+ = 2\pi\varphi_-(x) + \int_S \varphi_-(y)\frac{\partial\omega(x_-, y_-)}{\partial\nu}\,d_yS.$$

Здесь через $[w_+(x)]^{\mathrm{I}}_+$ обозначено предельное значение $w_+(x)$ при приближении точки x к поверхности S из пространства I по направлению положительной нормали, через $[w_+(x)]^{\mathrm{I}}_-$ — предельное значение $w_+(x)$ при приближении точки x к поверхности S из пространства I по направлению отрицательной нормали и т. д. При выводе этих формул нужно учитывать специфику риманова пространства, в силу которой

$$[\omega(x, y_+)]^{\mathrm{I}}_+ = [\omega(x, y_+)]^{\mathrm{II}}_-, \qquad [\omega(x, y_+)]^{\mathrm{I}}_- = [\omega(x, y_+)]^{\mathrm{II}}_+, \text{ т. д.}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &[v_+(x)]^{\mathrm{I}}_+ = [v_+(x)]^{\mathrm{II}}_-, \qquad [v_+(x)]^{\mathrm{I}}_- = [v_+(x)]^{\mathrm{II}}_+, \\ &[v_-(x)]^{\mathrm{I}}_+ = [v_-(x)]^{\mathrm{II}}_-, \qquad [v_-(x)]^{\mathrm{I}}_- = [v_-(x)]^{\mathrm{II}}_+. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Рассмотрим следующие краевые задачи.

Задача Дирихле — найти функцию, гармоническую во всем трехмерном пространстве, регулярную на бесконечности и принимающую на данной незамкнутой поверхности S заданные значения f_+ и f_- при подходе к поверхности S «сверху» (т. е. по направлению положительной нормали) и «снизу» (т. е. по направлению отрицательной нормали).

Задача Неймана — найти функцию, гармоническую во всем трехмерном пространстве, регулярную на бесконечности, нормальная производная которой принимает заданные значения f_+ и f_- при подходе к поверхности S «сверху» и «снизу».

Разрежем обычное пространство по поверхности S и обозначим через S_+ и S_- верхнюю и нижнюю стороны полученного разреза. Тогда нашу область можно представить себе как пространство I с границей $S_+ \cup S_-$, т. е. как область (I) в двойном римановом пространстве, и задачи Дирихле и Неймана для обычного пространства перейдут в соответствующие задачи для области (I) в двойном римановом пространстве.

Представим решение задачи Дирихле в виде

$$w(x) = \int_S \frac{\partial\omega(x, y_+)}{\partial\nu}\varphi_+(y)\,d_yS + \int_S \frac{\partial\omega(x, y_-)}{\partial\nu}\varphi_-(y)\,d_yS, \tag{5}$$

где $\varphi_+(y)$ и $\varphi_-(y)$— неизвестные плотности, для определения которых получается следующая система интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} &2\pi\varphi_+(x) + \int_S \frac{\partial\omega(x_+, y_+)}{\partial\nu}\varphi_+(y)\,d_yS + \int_S \frac{\partial\omega(x_+, y_-)}{\partial\nu}\varphi_-(y)\,d_yS = f_+(x), \\ &-2\pi\varphi_-(x) + \int_S \frac{\partial\omega(x_-, y_+)}{\partial\nu}\varphi_+(y)\,d_yS + \int_S \frac{\partial\omega(x_-, y_-)}{\partial\nu}\varphi_-(y)\,d_yS = f_-(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Представляя решение задачи Неймана в виде

$$v(x) = \int_S \omega(y_+, x)\varphi_+(y)\,d_yS + \int_S \omega(y_-, x)\varphi_-(y)\,d_yS, \tag{7}$$

получаем для определения неизвестных плотностей следующую фредгольмову систему интегральных уравнений

$$-2\pi\varphi_+(x)+\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_+,x_+)}{\partial\nu(x)}\varphi_+(y)\,d_yS+\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_-,x_+)}{\partial\nu(x)}\varphi_-(y)\,d_yS=f_+(x),$$

$$2\pi\varphi_-(x)+\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_+,x_-)}{\partial\nu(x)}\varphi_+(y)\,d_yS+\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_-,x_-)}{\partial\nu(x)}\varphi_-(y)\,d_yS=f_-(x). \tag{8}$$

Совершенно так же можно привести к интегральным уравнениям задачи Дирихле и Неймана для области (II), т.е. для пространства II с разрезом по той же поверхности S. При этом оказывается, что интегральные уравнения задачи Дирихле для первой области сопряжены с интегральными уравнениями задачи Неймана для второй области и что задача Дирихле для второй области приводит к интегральным уравнениям, сопряженным с интегральными уравнениями задачи Неймана для первой области. Поэтому для исследования разрешимости интегральных уравнений (6) и (8) нам достаточно исследовать интегральные уравнения задач Неймана с нулевыми граничными условиями как для области (I), так и для области (II). Перепишем эти уравнения в едином виде, введя параметр λ:

$$2\pi\varphi_+(x)+\lambda\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_+,x_+)}{\partial\nu(x)}\varphi_+(y)\,d_yS+\lambda\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_-,x_+)}{\partial\nu(x)}\varphi_-(y)\,d_yS=0,$$

$$-2\pi\varphi_-(x)+\lambda\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_+,x_-)}{\partial\nu(x)}\varphi_+(y)\,d_yS+\lambda\int\limits_S \frac{\partial\omega(y_-,x_-)}{\partial\nu(x)}\varphi_-(y)\,d_yS=0, \tag{9}$$

или на основании формул (1)—(2) окончательно запишем эту систему в виде

$$(1+\lambda)\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{II}}-(1-\lambda)\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{I}}=0,$$

$$(1+\lambda)\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{II}}-(1-\lambda)\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{I}}=0. \tag{10}$$

Значения $\lambda=1$ и $\lambda=-1$ соответствуют задаче Неймана для области (II) и задаче Неймана для области (I).

4. Прежде чем перейти к исследованию интегральных уравнений, напишем первую и вторую формулы Грина для области (I) и для области (II):

$$\int\limits_\infty |\operatorname{grad}[v_++v_-]_{\mathrm{I}}|^2\,dx=-\int\limits_S [v_++v_-]_+^{\mathrm{I}}\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{I}}d_xS+$$

$$+\int\limits_S [v_++v_-]_-^{\mathrm{I}}\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{I}}d_xS, \tag{11}$$

$$\int\limits_\infty |\operatorname{grad}[v_++v_-]_{\mathrm{II}}|^2\,dx=-\int\limits_S [v_++v_-]_+^{\mathrm{II}}\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{II}}d_xS+$$

$$+\int\limits_S [v_++v_-]_-^{\mathrm{II}}\left[\frac{\partial v_+}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{II}}d_xS;$$

$$\int\limits_S [v_+^1+v_-^1]_+^{\mathrm{I}}\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial\nu}\right]_+^{\mathrm{I}}d_xS-\int\limits_S [v_+^1+v_-^1]_-^{\mathrm{I}}\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial\nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial\nu}\right]_-^{\mathrm{I}}d_xS-$$

$$-\int\limits_S [v_+^2 + v_-^2]_+^{\mathrm{I}} \left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{I}} d_x S + \int\limits_S [v_+^2 + v_-^2]_-^{\mathrm{I}} \left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{I}} d_x S = 0. \tag{12}$$

$$\int\limits_S [v_+^1 + v_-^1]_+^{\mathrm{II}} \left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{II}} d_x S - \int\limits_S [v_+^1 + v_-^1]_-^{\mathrm{II}} \left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{II}} d_x S -$$

$$-\int\limits_S [v_+^2 + v_-^2]_+^{\mathrm{II}} \left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{II}} d_x S + \int\limits_S [v_+^2 + v_-^2]_-^{\mathrm{II}} \left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{II}} d_x S = 0.$$

Из первой формулы Грина следует, что если

$$\left[\frac{\partial v_+}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{I,\,II}} = \left[\frac{\partial v_+}{\partial \nu} + \frac{\partial v_-}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{I,\,II}} = 0,$$

тогда

$$v_+ + v_- = 0$$

во всей области (I) (или (II)), и, следовательно, во всем пространстве Римана $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$, т. е. $v_+ + v_- \equiv 0$.

Из полученного равенства будет следовать $\varphi_+ = \varphi_- = 0$. В самом деле, из

$$v(x) = v_+(x) + v_-(x) \equiv 0$$

следует

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \equiv 0.$$

Устремляя точку x к поверхности S, получаем

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{I}} = -2\pi\varphi_+(x) + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_+, x_+)}{\partial \nu(x)} \varphi_+(y)\, d_y S + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_-, x_+)}{\partial \nu(x)} \varphi_-(y)\, d_y S = 0,$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{II}} = 2\pi\varphi_+(x) + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_+, x_+)}{\partial \nu(x)} \varphi_+(y)\, d_y S + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_-, x_+)}{\partial \nu(x)} \varphi_-(y)\, d_y S = 0,$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{I}} = 2\pi\varphi_-(x) + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_+, x_-)}{\partial \nu(x)} \varphi_+(y)\, d_y S + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_-, x_-)}{\partial \nu(x)} \varphi_-(y)\, d_y S = 0,$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{II}} = -2\pi\varphi_-(x) + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_+, x_-)}{\partial \nu(x)} \varphi_+(y)\, d_y S + \int\limits_S \frac{\partial \omega(y_-, x_-)}{\partial \nu(x)} \varphi_-(y)\, d_y S = 0.$$

Отсюда

$$4\pi\varphi_{+} = \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_{-}^{\mathrm{II}} - \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_{+}^{\mathrm{I}} = 0,$$

$$4\pi\varphi_{-} = \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_{-}^{\mathrm{I}} - \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}\right]_{+}^{\mathrm{II}} = 0,$$

т. е. $\varphi_{+} = \varphi_{-} = 0$.

Исследование свойств резольвенты проведем аналогично [3].

1. Все полюсы резольвенты действительные. В самом деле, предполагая существование комплексного полюса $\lambda = \alpha + i\beta$, приходим к тому, что система (10) будет иметь решение вида

$$\varphi_{+} = \varphi_{+}^{1} + i\varphi_{+}^{2}, \qquad \varphi_{-} = \varphi_{-}^{1} + i\varphi_{-}^{2}$$

и соответствующая этому решению гармоническая комплексная функция

$$v(x) = v_{+}(x) + v_{-}(x) = v_{+}^{1} + v_{-}^{1} + i(v_{+}^{2} + v_{-}^{2})$$

будет удовлетворять соотношениям

$$\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu} + i\left(\frac{\partial v_{+}^{2}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{2}}{\partial \nu}\right)\right]_{-}^{\mathrm{II}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu} + i\left(\frac{\partial v_{+}^{2}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{2}}{\partial \nu}\right)\right]_{+}^{\mathrm{I}},$$

$$\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu} + i\left(\frac{\partial v_{+}^{2}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{2}}{\partial \nu}\right)\right]_{+}^{\mathrm{II}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu} + i\left(\frac{\partial v_{+}^{2}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{2}}{\partial \nu}\right)\right]_{-}^{\mathrm{I}}.$$

Умножим первое равенство на $[v_{+}^{1} + v_{-}^{1} - i(v_{+}^{2} + v_{-}^{2})]_{+}^{\mathrm{I}}$, второе — на $[v_{+}^{1} + v_{-}^{1} - i(v_{+}^{2} + v_{-}^{2})]_{-}^{\mathrm{I}}$, сложим и проинтегрируем по поверхности S. Принимая во внимание (4), (11), (12), получаем

$$\int\limits_{\infty} |\operatorname{grad}[v_{+}^{1} + v_{-}^{1}]_{\mathrm{II}}|^{2}\,dx + \int\limits_{\infty} |\operatorname{grad}[v_{+}^{2} + v_{-}^{2}]_{\mathrm{II}}|^{2}\,dx =$$

$$= -\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\left\{\int\limits_{\infty} |\operatorname{grad}[v_{+}^{1} + v_{-}^{1}]_{\mathrm{I}}|^{2}\,dx + \int\limits_{\infty} |\operatorname{grad}[v_{+}^{2} + v_{-}^{2}]_{\mathrm{I}}|^{2}\,dx\right\}.$$

Отсюда следует, что отношение $\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ должно быть действительным, т. е что $\beta = 0$, так как в противном случае

$$v_{+}^{1} + v_{-}^{1} = 0, \qquad v_{+}^{2} + v_{-}^{2} = 0,$$

и, следовательно,

$$\varphi_{+}^{1} = \varphi_{-}^{1} = \varphi_{+}^{2} = \varphi_{-}^{2} = 0.$$

2. Все эти полюсы простые. Пусть λ будет кратным полюсом. В таком случае должны существовать такие отличные от нуля функции φ_{+}^{1}, φ_{-}^{1}, φ_{+}^{2}, φ_{-}^{2}, что для соответствующих им потенциалов выполняются следующие соотношения

$$\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu}\right]_{-}^{\mathrm{II}} - \left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu}\right]_{+}^{\mathrm{I}} + \lambda\left\{\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu}\right]_{-}^{\mathrm{II}} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu}\right]_{+}^{\mathrm{I}}\right\} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu}\right]_{+}^{\mathrm{II}} - \left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu}\right]_{-}^{\mathrm{I}} + \lambda\left\{\left[\frac{\partial v_{+}^{1}}{\partial \nu} + \frac{\partial v_{-}^{1}}{\partial \nu}\right]_{-}^{\mathrm{I}} + \right.$$

$$+\left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{II}}\Bigg\}=0,$$

$$\left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{II}}-\left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{I}}+\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{II}}-\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{I}}+$$

$$+\lambda\left\{\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{II}}+\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{I}}\right\}=0,$$

$$\left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{II}}-\left[\frac{\partial v_+^1}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^1}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{I}}+\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{II}}-\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{I}}+$$

$$+\lambda\left\{\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_-^{\mathrm{I}}+\left[\frac{\partial v_+^2}{\partial \nu}+\frac{\partial v_-^2}{\partial \nu}\right]_+^{\mathrm{II}}\right\}=0.$$

Умножим теперь первое соотношение на $[v_+^2+v_-^2]_+^{\mathrm{I}}$, второе — на $[v_+^2+v_-^2]_-^{\mathrm{I}}$, третье — на $[v_+^1+v_-^1]_+^{\mathrm{I}}$, четвертое — на $[v_+^1+v_-^1]$, сложим и проинтегрируем по поверхности S; получим

$$\int_{\infty}|\operatorname{grad}[v_+^1+v_-^1]_{\mathrm{I}}|^2\,dx+\int_{\infty}|\operatorname{grad}[v_+^1+v_-^1]_{\mathrm{II}}|^2\,dx=0.$$

Отсюда следует, что $\varphi_+^1=\varphi_-^1=0$.

3. Нет ни одного полюса между -1 и $+1$. Предполагая существование полюса, как и прежде, приходим к следующему равенству

$$(1-\lambda)\int_{\infty}|\operatorname{grad}[v_++v_-]_{\mathrm{I}}|^2\,dx+(1+\lambda)\int_{\infty}|\operatorname{grad}[v_++v_-]_{\mathrm{II}}|^2\,dx=0.$$

Но такое равенство невозможно при $-1<\lambda<+1$, так как объемные интегралы имеют одинаковые знаки.

4. $\lambda=-1$ и $\lambda=+1$ не являются полюсами резольвенты. Это утверждение вытекает из написанной выше формулы, к которой мы придем, предполагая обратное.

Из проведенного исследования на основе известного результата Келлога вытекает возможность решения полученных интегральных уравнений методом последовательных приближений.

5. Рассуждения в этой статье для простоты велись для случая, когда рассматриваемая область — все трехмерное пространство с одним разрезом. Однако примененный метод позволяет рассматривать области более сложных конфигураций, например, когда область конечная с несколькими разрезами.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, Proc. London Math. Soc., **28**, 1896.
2. A. C. Dixon, Proc. London Math. Soc., ser. 2, vol. 1, 1904.
3. Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 3, ч. 2, Гостехиздат, М., 1934.

Поступила 6.V 1963 г.
Львов