Целочисленные представления знакопеременной группы четвертой степени

Л. А. Назарова

1. Рассматриваются целочисленные представления знакопеременной группы четвертой степени $\mathfrak{A}_4$, т. е. группы четных подстановок на множестве из четырех элементов.

До настоящего времени рассматривались, в основном, целочисленные представления тех групп, которые имеют конечное число неразложимых представлений. В [1] доказана теорема: группа G имеет конечное число неразложимых целочисленных представлений тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы — циклические группы порядка p или p^2.

Как видно из этого утверждения, большинство групп имеет бесконечно много неразложимых представлений. Однако целочисленные представления таких групп почти не изучены. Полностью описаны целочисленные представления группы (2,2) [2].

Группа $\mathfrak{A}_4$ содержит группу (2,2) в качестве своей силовской 2-подгруппы. Поэтому по теореме [1] $\mathfrak{A}_4$ имеет бесконечно много целочисленно неразложимых представлений. Изучение целочисленных представлений $\mathfrak{A}_4$ позволяет изучить связь между представлениями подгруппы и группы. Известно, что всякое представление подгруппы индуцирует представление группы. Можно показать, что неразложимое представление группы (2,2)

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

индуцирует разложимое представление группы $\mathfrak{A}_4$.

Группа $\mathfrak{A}_4$ имеет две образующие a и c и задается следующими определяющими соотношениями:

$$a^2=c^3=(ac)^3=1,\qquad acac^2acac^2=1.$$

Через b будем в дальнейшем обозначать элемент cac^2.
$\mathfrak{A}_4$ имеет пять целочисленных неприводимых представлений:

$$\text{I)}\ a=(1),\qquad c=(1);\qquad \text{II)}\ a=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix};$$

$$\text{III)}\ a=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\qquad \text{IV)}\ a=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$c=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\qquad \text{V)}\ a=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad c=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

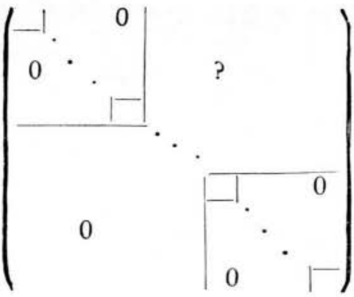
причем III, IV, V рационально эквивалентные представления.

Во всех группах, целочисленные представления которых изучались до сих пор, выполнялось [3] условие

$$\operatorname{Ext}_1(B, A)=0, \tag{1}$$

где B и A — модули неприводимых рационально эквивалентных представлений группы. Выполнение этого условия для коммутативных групп следует из теоремы Штейница, доказанной еще в 1912 г. [4]. С. Д. Берман показал, что это условие справедливо и для групп, все силовские подгруппы которых циклические [5].

Это условие существенно использовалось при непосредственном описании целочисленных представлений группы. Для представлений групп, в которых это условие выполнено, мы получаем некоторую предварительную нормальную форму:



;

внутри больших ящиков стоят неприводимые рационально эквивалентные представления. Нетрудно видеть, что нули, стоящие внутри больших ящиков, благодаря выполнению условия (1) существенно облегчают решение задачи.

В группе $\mathfrak{A}_4$ условие (1) не выполняется, а именно:

$\mathrm{Ex}\,t_1$	III	IV	V
III	(2,2)	(2)	0
IV	0	0	0
V	(2)	(2)	0

.

Из приведенной таблицы видно, что ввиду невыполнения условия (1) для группы $\mathfrak{A}_4$ приходится пользоваться существенно новыми методами по сравнению со всеми группами, целочисленные представления которых рассматривались до сих пор.

2. Рассмотрим сначала те представления группы $\mathfrak{A}_4$, в которые входят неприводимые представления только видов III, IV, V. Представления такого вида можно рассматривать, как целочисленные представления кольца Λ, где Λ — факторкольцо группового кольца группы $\mathfrak{A}_4$ по идеалу, порожденному элементом $1 + a + b + ab$.

Сформулируем в удобном для нас виде один результат А. В. Ройтера, который будем в дальнейшем использовать. Пусть A — модуль целочисленного представления кольца Λ, где Λ — факторкольцо некоторого группового кольца. Введем числовую функцию f, определенную на модулях, допускающих мономорфное вложение в модуль A. Будем говорить, что цепочка подмодулей $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$ модуля A неповторяющаяся, если ни при каких $i \neq j$ A_i не изоморфно A_j.

Из теоремы Цассенхауза [6] следует, что длины неповторяющихся цепей ограничены в совокупности. Обозначим теперь $f(A)$ максимальную длину неповторяющейся цепи, начинающейся с A_1. Пусть теперь B — модуль, допускающий мономорфное вложение в A, вообще говоря, не единственное. Рассмотрим T_B — совокупность всех мономорфизмов φ из B в A. Положим $f_A(B) = \min\limits_{\varphi \in T_B} f(\mathrm{Im}(\varphi))$.

А. В. Ройтер доказал утверждение: пусть A — модуль целочисленного представления кольца Λ такой, что

1) $\mathrm{Ext}_1(X, A) = 0$, где X — любой модуль представления кольца (модуль, обладающий этим свойством будем в дальнейшем называть в соответствии с [3] слабо инъективным);

2) модуль всякого неприводимого представления кольца Λ допускает мономорфное вложение в A;

тогда во всяком модуле представления B кольца Λ существует ряд подмодулей $0 = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_m = B$ такой, что $B_i/B_{i-1} = \Sigma \oplus B_{ij}$, все B_{ij} допускают мономорфное вложение в A и $f_A(B_{ij}) = i$ [7].

Само кольцо $\Lambda = Z(\mathfrak{A}_4)/\{1 + a + b + ab\}$ как модуль имеет вид

$$\mathrm{IV} \oplus \begin{pmatrix} \mathrm{III} & X \\ 0 & \mathrm{V} \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} \mathrm{III} & X \\ 0 & \mathrm{V} \end{pmatrix}$ — расширение III при помощи модуля V, соответствующее единственному ненулевому элементу $\mathrm{Ext}_1(\mathrm{V}, \mathrm{III}) = (2)$. Модули IV, $\begin{pmatrix} \mathrm{III} & X \\ 0 & \mathrm{V} \end{pmatrix}$ очевидно проективны.

Всякому представлению A некоторой группы соответствует двойственное представление A^*, которое получается из данного транспонированием и переходом к обратной для каждой матрицы представления. Очевидно, $\mathrm{Ext}_1(B^*, A^*) = \mathrm{Ext}_1(A, B)$. В частности, если A проективен, то A^* слабо инъективен. Легко проверить, что

$$\mathrm{IV}^* = \mathrm{V}, \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{III} & X \\ 0 & \mathrm{V} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \mathrm{IV} & X \\ 0 & \mathrm{III} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, V и $\begin{pmatrix} \mathrm{IV} & X \\ 0 & \mathrm{III} \end{pmatrix}$ слабо инъективны.

Очевидно, модуль V удовлетворяет условиям утверждения А. В. Ройтера, при этом $f_{\mathrm{V}}(\mathrm{V}) = 1$, $f_{\mathrm{V}}(\mathrm{III}) = 2$, $f_{\mathrm{V}}(\mathrm{IV}) = 3$. Следовательно, всякий модуль представления X кольца Λ приводится к виду

$$X = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathrm{IV} & & 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & X_{12} & & & X_{13} & \\ 0 & & \mathrm{IV} & & & & & & \\ \hline & & & \mathrm{III} & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & & X_{23} & \\ & & & 0 & & \mathrm{III} & & & \\ \hline & & & & & & \mathrm{V} & & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & & \mathrm{V} \end{array}\right],$$

Предположим, что X неразложим. Пусть какой-нибудь, для определенности, первый, из модулей III «склеен» с каким-нибудь из модулей типа IV. Поскольку $\mathrm{Ext}_1(\mathrm{III}, \mathrm{IV}) = (2)$, мы можем сделать в первых столбцах матрицы X_{12}, соответствующих первому ящику III, нули, за исключением строк, соответствующих одному ящику типа IV. Таким образом, в X можно выделить подмодуль типа $\begin{pmatrix} \mathrm{IV} & X \\ 0 & \mathrm{III} \end{pmatrix}$.

Поскольку $\begin{pmatrix} \mathrm{IV} & X \\ 0 & \mathrm{III} \end{pmatrix}$ слабо инъективен и X неразложим, то либо $X = \begin{pmatrix} \mathrm{IV} & X \\ 0 & \mathrm{III} \end{pmatrix}$, либо $X_{12} = 0$.

Аналогичным образом, рассматривая X_{23} и учитывая проективность $\begin{pmatrix} \mathrm{III} & X \\ 0 & \mathrm{V} \end{pmatrix}$ заключаем, что либо $X = \begin{pmatrix} \mathrm{III} & X \\ 0 & \mathrm{V} \end{pmatrix}$, либо $X_{23} = 0$. Если $X_{12} = 0$,

$X_{23}=0$ и X неразложим, то X имеет вид

$$X=\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathrm{IV} & & 0 & & & \\ & \ddots & & & X_{13} & \\ 0 & & \mathrm{IV} & & & \\ \hline & & & \mathrm{V} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & \mathrm{V} \end{array}\right).$$

Но поскольку $\mathrm{Ext}_1(\mathrm{V},\ \mathrm{IV})=(2)$, то легко убедиться, что если X неразложим, то он равен в этом случае $\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & \mathrm{X}\\ 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix}$.

Итак, имеется всего 6 неразложимых представлений кольца Λ, или, что то же самое, 6 неразложимых представлений группы $\mathfrak{A}_4$, включающих только ящики III, IV, V, а именно:

$$(\mathrm{III}),\ (\mathrm{IV}),\ (\mathrm{V}),\ \begin{pmatrix}\mathrm{III} & X\\ 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\mathrm{IV} & \mathrm{X}\\ 0 & \mathrm{III}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\mathrm{IV} & \mathrm{X}\\ 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix}.$$

Интересно заметить, что мы не использовали сведения о том, что $\mathrm{Ext}_1(\mathrm{III},\mathrm{III})=(2,2)$. На самом деле, $\begin{pmatrix}\mathrm{III} & \mathrm{X}\\ 0 & \mathrm{III}\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & \mathrm{X}\\ 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix}$.

3. Рассмотрим теперь представления $\mathfrak{A}_4$, содержащие ящики II, III, IV, V, но не содержащие I.

Подобными рассуждениями можно установить, что имеется 20 неразложимых представлений $\mathfrak{A}_4$ вида:

$$D_1=(\mathrm{II}),\quad D_2=(\mathrm{III}),\ D_3=(\mathrm{IV}),\ D_4=(\mathrm{V}),\quad D_5=\begin{pmatrix}\mathrm{III} & \mathrm{X}\\ 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_6=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & X\\ 0 & \mathrm{III}\end{pmatrix}$$

$$D_7=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & \mathrm{X}\\ 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_8=\begin{pmatrix}\mathrm{II} & c\\ 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_9=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & a\\ 0 & \mathrm{II}\end{pmatrix},$$

$$D_{10}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & a & 0\\ 0 & \mathrm{II} & c\\ 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_{11}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & a & x\\ 0 & \mathrm{II} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_{12}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & 0 & x\\ 0 & \mathrm{II} & c\\ 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},$$

$$D_{13}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & 0 & a\\ 0 & \mathrm{IV} & b\\ 0 & 0 & \mathrm{II}\end{pmatrix},\quad D_{14}=\begin{pmatrix}\mathrm{II} & c & d\\ 0 & \mathrm{V} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_{15}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & x & a\\ 0 & \mathrm{III} & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{II}\end{pmatrix},$$

$$D_{16}=\begin{pmatrix}\mathrm{II} & 0 & c\\ 0 & \mathrm{III} & x\\ 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_{17}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & 0 & a & x & 0\\ 0 & \mathrm{IV} & b & 0 & x\\ 0 & 0 & \mathrm{II} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{V} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D_{18}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & 0 & 0 & x & 0\\ 0 & \mathrm{IV} & 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & \mathrm{II} & c & d\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{V} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},$$

$$D_{19}=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & 0 & x & 0\\ 0 & \mathrm{II} & c & d\\ 0 & 0 & \mathrm{V} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\mathrm{IV} & 0 & a & x\\ 0 & \mathrm{IV} & b & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{II} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{V}\end{pmatrix},$$

В обозначениях x — единственный ненулевой элемент соответствующего $\mathrm{Ext}_1(A,\ B)=(2)$; a и b — образующие $\mathrm{Ext}_1(\mathrm{II},\ \mathrm{IV})=(2,2)$; c и d — образующие $\mathrm{Ext}_1(\mathrm{V},\ \mathrm{II})=(2,2)$. Важную роль в дальнейшем будет играть представление D.

Заметим, что все эти 20 представлений неразложимы 2-адически.

4. Рассмотрим теперь 2-адические представления $\mathfrak{A}_4$, содержащие все неприводимые компоненты. По сути дела это сведется к тому, что мы будем считать, что II не «склеен» с I, так как $\operatorname{Ext}_1(\mathrm{II}, \mathrm{I}) = (3)$, а порядки остальных $\operatorname{Ext}_1(A, B)$, где A и B неприводимы, 2 или 2^2.

Пусть Y — произвольное 2-адическое представление $\mathfrak{A}_4$,

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} E & Y_{12} \\ \hline 0 & \overline{Y} \end{array}\right),$$

где $\overline{Y}$ распадается на ящики указанных 20 видов. Выпишем таблицу расширений:

Ext_1	D	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
I	(2,2)	(0)	(2)	(4)	(0)	(0)	(2,2)	(2)	(0)	(2)

Ext_1	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	D_{17}	D_{18}	D_{19}
I	(0)	(2)	(2)	(2,2)	(0)	(2,2)	(0)	(2,2)	(2,2)	(2)

В дальнейшем через a и b будем обозначать образующие $\operatorname{Ext}_1(A, B) = (2,2)$, через x — образующую $\operatorname{Ext}_1(A, B) = (2)$. Оказывается, что имеется лишь конечное число неразложимых представлений Y, у которых $\overline{Y}$ не содержит D. Рассмотрим поэтому вначале тот случай, когда $\overline{Y} = D \oplus \ldots \oplus D$. Приведение Y_{12} в указанном случае эквивалентно задаче приведения двух матриц над полем из двух элементов с помощью двух матриц. Эта задача решена [8]. Используя результат приведения, получим, что для данной размерности имеются следующие неразложимые представления Y:

$$1)\quad Y_{12} = \begin{pmatrix} a & b & & & & 0 \\ & a & b & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & a & b \end{pmatrix}; \qquad 2)\quad Y_{12} = \begin{pmatrix} a & b & & & 0 \\ & a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b \\ 0 & & & & a \end{pmatrix};$$

$$3)\quad Y_{12} = \begin{pmatrix} b & a & & & 0 \\ & b & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a \\ 0 & & & & b \end{pmatrix}; \qquad 4)\quad Y_{12} = \begin{pmatrix} a & & & & 0 \\ b & a & & & \\ & b & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a \\ 0 & & & & b \end{pmatrix};$$

$$5)\quad Y_{12} = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a \end{pmatrix} + (\Phi(b)),$$

где $\Phi(b)$ — нормальная форма Фробениуса, причем характеристический полином $\Phi(b)$ неприводим или — степень неприводимого.

Пусть теперь $\overline{Y}$ содержит любые из 20 указанных неразложимых представлений. Тогда возможны следующие неразложимые представления:

$$
Y_1=\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0\;0\ldots 0\\ a\,(b)\,0\ldots 0\\ \hline A_1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & b\\ a & 0\\ \hline & 0\end{matrix}\\
\hline
0 & \begin{matrix}D & & & \\ & D & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & D\end{matrix} & 0\\
\cline{2-3}
 & 0 & \begin{matrix}\mathrm{IV} & x\\ 0 & \mathrm{III}\end{matrix}
\end{array}\right),\qquad
Y_2=\left(\begin{array}{c|cc|c}
\begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0\,0\ldots 0\\ a\,0\ldots 0\\ \hline B_1\\ \hline 0\end{matrix} & \begin{matrix}0\;0\ldots 0\\ b\;0\ldots 0\\ \hline 0\\ \hline B_2\end{matrix} & \begin{matrix}0 & b\\ a & 0\\ \hline & 0\end{matrix}\\
\hline
0 & \multicolumn{2}{c|}{\begin{matrix}D & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & D\end{matrix}} & 0\\
\cline{2-4}
 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{matrix}\mathrm{IV} & x\\ 0 & \mathrm{III}\end{matrix}
\end{array}\right).
$$

где A_1 — матрица вида *1*) или *2*); B_1 и B_2 — матрицы типа *1*), в этом случае сумма числа строк и столбцов B_1 не меньше суммы числа строк и столбцов B_2; 2). B_1 и B_2 — матрицы типа 2, в этом случае сумма числа строк и столбцов B_2 строго больше суммы числа строк и столбцов B_1; 3). B_1 — матрица типа *1*), B_2 — матрица типа *2*).

Далее, возможно неразложимое представление

$$
Y_3=\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\\ & & & & 1\end{matrix} & B_1 & \begin{matrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\\ a\end{matrix}\\
\hline
0 & \begin{matrix}D & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & D\end{matrix} & 0\\
\cline{2-3}
 & 0 & D_{13}
\end{array}\right),
$$

где B_1 — матрица типа *4*).

И, наконец, возможны следующие неразложимые представления:

$$
1)\ \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & D_i\end{pmatrix};\qquad 2)\ \begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & D_i\end{pmatrix};\qquad 3)\ \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & D_i\end{pmatrix};\qquad 4)\ \begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & D_i\end{pmatrix},
$$

где в случае 1) $D_i \neq D_1, D_2, D$, а x — образующая соответствующего $\operatorname{Ext}_1(D_i, \mathrm{I})$, в случаях 3), 4), 2) $D_i = D_1, D_2, D_3$, a и b — две ненулевые образующие соответствующих $\operatorname{Ext}_1(D_i, \mathrm{I})$.

Далее, возможны неразложимые представления

$$
5)\ \begin{pmatrix}1 & 0 & b & 0\\ 0 & 1 & a & a\\ 0 & 0 & D_{15} & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_6\end{pmatrix};\qquad 6)\ \begin{pmatrix}1 & x & a\\ 0 & D_{11} & 0\\ 0 & 0 & D_6\end{pmatrix};\qquad 7)\ \begin{pmatrix}1 & a & x\\ 0 & D_6 & 0\\ 0 & 0 & D_9\end{pmatrix};
$$

$$
8)\ \begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & D_9 & 0\\ 0 & 0 & D_{17}\end{pmatrix};\qquad 9)\ \begin{pmatrix}1 & x & x\\ 0 & D_7 & 0\\ 0 & 0 & D_9\end{pmatrix}.
$$

5. Рассмотрим целочисленные представления $\mathfrak{A}_4$. Пусть Y — произвольное, необязательно неразложимое 2-адическое представление $\mathfrak{A}_4$. Обозначим через y_{I} число неприводимых компонент вида I, входящих в Y, y_{II} — число неприводимых компонент вида II, входящих в y, и $y = \min(y_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{II}})$. Оказывается, что всякому 2-адическому представлению $\mathfrak{A}_4$ соответствует $y+1$ целочисленное представление. Именно, t, $0 \leqslant t \leqslant y$, можно сопоставить некоторое целочисленное представление следующим образом: на произвольных t местах матрицы Yy_{ij}, соответствующих пересечению ящиков I и II, вставляем «склейку», возможную для ящиков I и II, причем для любой пары таких мест y_{ij} и y_{kl} выполняется условие $i \neq k$, $j \neq l$.

Из этого описания, при желании, нетрудно получить все неразложимые целочисленные представления $\mathfrak{A}_4$ и степень неоднозначности разложения представлений на неразложимые.

В заключение, автор выражает глубокую благодарность Д. К. Фаддееву за ценные беседы и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман и П. М. Гудивок, О целочисленных представлениях конечных групп, Докл. и сообщ. Ужгородск. гос. ун-та, сер. физ.-матем. наук, Изд-во Ужгородск. ун-та, № 5, 1962, 74—75.

2. Л. А. Назарова, Целочисленные представления четверной группы, ДАН СССР, т. 140, № 5, 1961, 1011—1014.

3. А. Картан и С. Эйленберг, Гомологическая алгебра, Изд-во иностр. литер., М., 1960.

4. Steinitr, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraishen Zahlkörpern, M. A., **71**, 1912, 328; **72**, 1912, 279.

5. С. Д. Берман, Целочисленные представления конечных групп, Автореферат диссерт. на соиск. уч. степ. докт. физ.-матем. наук, Изд-во АН СССР, М., 1963.

6. Zassenhaus, Neuer Beweis der Endlichkeit der klassenzahle bei unimodularer Äquvalenz endlicher gezahliger Substitutions-gruppen, Abh. Math. Sen. Hasichen Univ., **12**, 1938, 276—288.

7. А. В. Ройтер, Категории представлений, УМН, т. XVII, вып. 6 (108), 1962.

8. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953

Поступила 5.VI 1963 г.
Киев