О категории представлений

А. В. Ройтер

В последнее время наряду с исследованиями в области представлений над полями появился ряд работ, в которых рассматриваются целочисленные представления групп и колец, представления над локальными и дедекиндовыми кольцами.

Проблема описания представлений некоторого кольца Λ — это проблема описания некоторой подкатегории категории всех Λ-модулей. Естественно возникает вопрос, какими специфическими свойствами обладают категории модулей представлений по сравнению с произвольными категориями модулей. При этом можно ограничиться рассмотрением представлений кольца, так как изучение представлений группы естественно сводится к изучению представлений ее группового кольца.

В настоящей работе делается попытка дать определение «категории представлений» и изучаются некоторые ее свойства.

1. Основные определения

Пусть Λ — некоторое ассоциативное кольцо с единицей K_Λ $({}_\Lambda K)$ — категория правых (левых) Λ-модулей. Будем считать, что категория K_Λ $({}_\Lambda K)$ содержит нулевой модуль, вместе с каждыми двумя модулями содержит их прямую сумму и вместе с каждым модулем — все модули, ему изоморфные. Будем также считать, что если модули A и B содержатся в K_Λ $({}_\Lambda K)$ в качестве объектов, то в K_Λ $({}_\Lambda K)$ содержатся в качестве морфизмов все гомоморфизмы A в B.

В настоящей статье кольцо Λ везде будет предполагаться нетеровым, а модули — конечнопорожденными.

Пусть $f: A \to B$, где A, $B \in K_\Lambda ({}_\Lambda K)$, тогда естественно определяются модули $\operatorname{Ker}(f)$, $\operatorname{Coker}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $\operatorname{Coim}(f)$, но они могут и не принадлежать категории. Гомоморфизм f назовем строгим гомоморфизмом, если его ядро, коядро и образ (а значит, и кообраз) принадлежат категории. Подмодуль A модуля $B (A, B \in K_\Lambda ({}_\Lambda K))$ назовем строгим подмодулем, если фактор-модуль B/A принадлежит категории. Будем говорить, что модуль строго неприводим, если он не содержит строгих собственных подмодулей. Заметим, что в категории модулей целочисленных представлений вообще нет модулей, неприводимых в обычном смысле, но есть представления, неприводимые в матричном смысле; им и соответствуют строго неприводимые модули.

Цепь подмодулей $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots (A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots)$ модуля A будем называть строгой возрастающей (убывающей) цепью, если A/A_i содержится в категории.

Функтор T (для определенности, контравариантный), определенный на категории $K\Lambda$-модулей со значениями в категории $K'\Lambda'$-модулей, будем называть точным на строгих последовательностях, если из точности последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

следует точность последовательности

$$0 \to T(C) \to T(B) \to T(A) \to 0.$$

Если K и K' — категории всех Λ, Λ'-модулей, то T будет переводить любую точную последовательность в точную ([1], Предложение II, 4.1), но если K и K' не содержат всех Λ, Λ'-модулей, то можно утверждать только, что T переводит точную последовательность, все гомоморфизмы которой являются строгими, в точную.

Будем говорить, что нетерово кольцо Λ обладает категорией представлений, если существуют категория K_Λ правых нетеровых Λ-модулей и категория ${}_\Lambda K$ левых нетеровых Λ-модулей, такие, что выполняются следующие условия:

1) $R_\Lambda \in K_\Lambda$, ${}_\Lambda R \in {}_\Lambda K$, где $R_\Lambda ({}_\Lambda R)$ — правое (левое) регулярное представление кольца Λ, то есть само кольцо, рассматриваемое как правый (левый) модуль;

2) если $A \subset B$, $B \in K_\Lambda ({}_\Lambda K)$, то $A \in K_\Lambda ({}_\Lambda K)$;

3) категории K_Λ и ${}_\Lambda K$ инверсно изоморфны, причем контравариантный функтор, осуществляющий этот инверсный изоморфизм, точен на строгих последовательностях.

Последнее условие означает, что всякому $A \in K_\Lambda ({}_\Lambda K)$ соответствует $T(A) \in {}_\Lambda K (K_\Lambda)$, $f: A \to B$ соответствует $T(f): T(B) \to T(A)$, $T(T(A)) = A$ и если $A/B = C$ $(A, B, C \in K_\Lambda ({}_\Lambda K)$, то $T(A)/T(C) = T(B)$.

При выполнении этих условий будем называть K_Λ категорией правых представлений, а ${}_\Lambda K$ — категорией левых представлений кольца Λ. Важный пример категории представлений, оправдывающий ее название, дает следующее.

Предложение 1. *Если* M — *дедекиндово кольцо,* Λ — *кольцо с единицей, причем* M *содержится в центре* Λ *и является конечнопорожденным* M-*модулем без кручения, то* Λ *обладает категорией представлений. Категорию правых (левых) представлений кольца* Λ *образуют те* Λ-*модули, которые являются конечнопорожденными* M-*модулями без кручения.*

Первое и второе условия выполняются очевидным образом. Рассмотрим функтор $T(A) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{M}}(A, \mathrm{M})$. Если $A \in K_\Lambda ({}_\Lambda K)$, то A можно рассматривать как правый (левый) Λ-модуль и левый (правый) M-модуль ([1], глава II, § 6). Поэтому функтор T можно рассматривать как определенный на $K_\Lambda({}_\Lambda K)$ со значениями в ${}_\Lambda K(K_\Lambda)$. Очевидно, что этот функтор осуществляет инверсный изоморфизм категорий K_Λ и ${}_\Lambda K$. Точность функтора T на строгих последовательностях вытекает из предложений II. 4.6 и VIII. 4.1 [1].

2. Некоторые свойства категории представлений

Предложение 2. *Во всяком модуле, принадлежащем категории представлений нетерова кольца, выполняется условие обрыва строгих возрастающих и убывающих цепей.*

Обрыв возрастающих (а тем более, строгих возрастающих) цепей следует из нетеровости. Пусть $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ — строгая убывающая цепь подмодулей модуля A. Естественно определены строгие гомоморфизмы $f_i : A_i \to A$. Соответственно определяются $T(f_i): T(A) \to \to T(A_i)$. Легко проверить, что

$$\mathrm{Ker}(T(f_i)) \subseteq \mathrm{Ker}(T(f_{i+1})).$$

Итак, имеем

$$\mathrm{Ker}(T(f_1)) \subseteq \mathrm{Ker}(T(f_2)) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ker}(T(f_n)) \subseteq \ldots,$$

причем это будут строгие подмодули модуля $T(A)$. Из-за условия обрыва возрастающих цепей $\mathrm{Ker}(T(f_i)) = \mathrm{Ker}(T(f_{i+1}))$ для некоторого i, а значит $A_{i+1} = A_i$.

В категории представлений $K_\Lambda({}_\Lambda K)$ особую роль, очевидно, должны играть модули $R_\Lambda({}_\Lambda R)$ и $T({}_\Lambda R)(T(R_\Lambda))$. В некоторых интересных случаях (например в случае целочисленных представлений конечной группы) $R_\Lambda({}_\Lambda R)$ изоморфен $T_\Lambda(R)(T(R_\Lambda))$, но уже в случае целочисленных представлений кольца эти модули могут быть неизоморфными. Подмодули модуля $R_\Lambda({}_\Lambda R)$ будем называть идеалами, подмодули модуля $T({}_\Lambda R)(T(R_\Lambda))$ — квазиидеалами.

Предложение 3. *Всякий строго неприводимый модуль, принадлежащий категории представлений, является квазиидеалом.*

Пусть $T(I)$ — строго неприводимый модуль, $T(I) \in K_\Lambda$. Рассмотрим $I \in {}_\Lambda K$. Всякий модуль есть фактормодуль свободного, значит, существует эпиморфизм $f : {}_\Lambda R \oplus \ldots \oplus {}_\Lambda R \to I$. Заметим, что f — строгий гомоморфизм, поэтому существует мономорфизм $T(f): T(I) \to T({}_\Lambda R) \oplus \ldots \oplus T({}_\Lambda R)$. Построим $T(f)_i : T(I) \to T({}_\Lambda R)_i$. Если $T(I) \neq 0$, то существует такое i, что $\mathrm{Im}(T(f)_i) \neq 0$. Покажем, что для этого i $T(f)_i$ является мономорфизмом. Действительно, пусть $0 \neq \mathrm{Ker}(T(f)_i) \subset T(I)$, но

$$T(I)/\mathrm{Ker}(T(f)_i) \simeq \mathrm{Im}(T(f)_i) \in K_\Lambda.$$

Следовательно, $\mathrm{Ker}(T(f)_i)$ — строгий подмодуль $T(I)$, а значит, если $\mathrm{Ker}(T(f)_i) \neq 0$, то модуль $T(I)$ не может быть строго неприводимым.

Предложение 4. *Диаграмма вида*

$$\begin{array}{ccc} 0 \to A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \\ T({}_\Lambda R) & & \end{array}$$

где $f : A \to B$ — строгий гомоморфизм и строка точная, может быть вложена в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 \to A & \to & B \\ \downarrow & \swarrow & \\ T({}_\Lambda R) & & \end{array}$$

Доказательство непосредственно следует из проективности ${}_\Lambda R$ и существования функтора T, точного на строгих последовательностях.

3. Категории представлений с условием ограниченности неповторяющихся цепей квазиидеалов

Цепь подмодулей $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ модуля A будем называть неповторяющейся, если никакие два подмодуля A_i и A_j не изоморфны при $i \neq j$. Будем говорить, что в модуле A выполнено условие ограниченности неповторяющихся цепей, если существует такое натуральное число n, что длина всякой неповторяющейся цепи подмодулей модуля A не превосходит n.

Конечно, в модуле с условиями минимальности и максимальности выполнено и условие ограниченности неповторяющихся цепей. Однако, например, в модулях целочисленных представлений конечных групп также выполняется условие ограниченности неповторяющихся цепей, хотя условие минимальности не выполняется.

В настоящем параграфе будем предполагать, что в категории представлений K_Λ выполнено условие ограниченности неповторяющихся цепей квазиидеалов, т. е. условие ограниченности неповторяющихся цепей выполняется для подмодулей модуля $T({}_\Lambda R)$. Введем в этом случае некоторую функцию φ, определенную на множестве квазиидеалов категории K_Λ с натуральными значениями. Пусть I — некоторый квазиидеал, т. е. модуль, который может быть мономорфно вложен в $T({}_\Lambda R)$. Рассмотрим сначала некоторый мономорфизм $f: I \to T({}_\Lambda R)$ и определим $\varphi(I, f)$ как максимальную длину неповторяющейся цепи

$$\operatorname{Im}(f) = A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{\varphi(I,f)} \subseteq T({}_\Lambda R).$$

Положим теперь $\varphi(I) = \min\limits_f \varphi(I, f)$. Поставим в соответствие каждому I мономорфизм f_I, для которого достигается минимум, т. е. $\varphi(I) = \varphi(I, f_I)$, причем выберем f_I так, чтобы из $\operatorname{Im}(f_I) \subset A \subseteq T({}_\Lambda R)$ следовало, что $\operatorname{Im}(f_I)$ не изоморфен A. Заметим теперь, что из $I \simeq \operatorname{Im}(f_I) \subset A \subseteq T({}_\Lambda R)$ следует, что $\varphi(A) < \varphi(I)$. Действительно, рассмотрим неповторяющуюся цепь $A = A_1 \subset \ldots \subset A_{\varphi(A,f)}$ длины $\varphi(A, f)$, где f — естественный мономорфизм A в $T({}_\Lambda R)$, и неповторяющуюся цепь $\operatorname{Im}(f_I) \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{\varphi(A,f)}$ длины $\varphi(A, f) + 1$. Отсюда

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(A, f) < \varphi(I, f_I) = \varphi(I).$$

Заметим также, что, если длины всех неповторяющихся цепей квазиидеалов не превосходят n, то и $\varphi(I) \leqslant n$ для всех I.

Предложение 5. *Если квазиидеал I является строгим подмодулем модуля A, то либо $A = I \oplus A'$, либо существует точная последовательность $A \to I' \to 0$, где I' — квазиидеал и $\varphi(I') < \varphi(I)$.*

Рассмотрим мономорфизм $f_I: I \to T({}_\Lambda R)$, соответствующий I. Из предложения 4 следует, что мономорфизм f_I можно продолжить до гомоморфизма $g: A \to T({}_\Lambda R)$. Заметим, что $\operatorname{Im}(f_I) \subseteq \operatorname{Im}(g) \subseteq T({}_\Lambda R)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\operatorname{Im}(f_I) = \operatorname{Im}(g)$. Покажем, что тогда $A = I \oplus \operatorname{Ker}(g)$. Действительно, пусть $a \in A$, $ag \in \operatorname{Im}(g) = \operatorname{Im}(f_I)$, значит, найдется $b \in I$ такой, что $bg = bf_I = ag$. Тогда $a = b + (a - b)$, причем $b \in I$, $(a - b) \in \operatorname{Ker}(g)$. С другой стороны, очевидно, что $I \cap \operatorname{Ker}(g) = 0$, так как f_I — мономорфизм.

2. Пусть $\operatorname{Im}(f_I) \subset \operatorname{Im}(g)$, тогда имеем точную последовательность $0 \to \operatorname{Ker}(g) \to A \to I' \to 0$, где I' изоморфен $\operatorname{Im}(G)$, а значит, $\varphi(I') < \varphi(I)$.

Построим теперь функцию ψ, ставящую в соответствие каждому модулю $A \in K_\Lambda$ натуральное число $\psi(A)$. Рассмотрим M_A — множество всех квазиидеалов, являющихся фактормодулями модуля A (из предложений 2 и 3 следует, что M_A непусто) и положим $\psi(A) = \min_{I \in M_A} \varphi(I)$.

Предложение 6. *Если $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность, где A, B, C содержатся в K_Λ, то $\psi(A) \geqslant \psi(B)$, $\psi(C) \geqslant \psi(B)$.*

Второе утверждение очевидно. Пусть $\psi(A) = m$. Это означает, что существует точная последовательность $0 \to X \to A \to I \to 0$, где $\varphi(I) = m$. Рассмотрим B/X. Имеем точную последовательность $0 \to A/X \to B/X$, где A/X изоморфен I. Из предложения 5 следует, что либо $B/X = I \oplus B'$, либо существует точная последовательность $B/X \to I' \to 0$, причем $\varphi(I') < m$. В обоих случаях видно, что $\psi(B/X) \leqslant m$, а $\psi(B) \leqslant \psi(B/X)$, значит, $\psi(B) \leqslant \psi(A)$, что и требовалось доказать.

Предложение 7. *Пусть $A \in K_\Lambda$ и $0 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_m = A$ — строгая возрастающая цепь подмодулей модуля A, причем такая, что A_i/A_{i-1} $(i = 1, \ldots, m)$ — квазиидеал и $\varphi(A_i/A_{i-1}) = \psi(A)$ для всех i. Тогда $A = I_1 \oplus \ldots \oplus I_m$, $I_i \simeq A_i/A_{i-1}$.*

$A_1 \simeq I_1$ — квазиидеал. Применим к $A_1 \subset A$ предложение 5. Так как $\varphi(A_1) = \psi(A)$, то $A = A_1 \oplus A'$, где $A' = A/A_1$, $\psi(A') = \psi(A) = \varphi(I_i)$. Применим предложение 5 к ситуации $A_2/A_1 \simeq I_2 \subset A' = A/A_1$; получим $A' = I_2 \oplus A''$, и т. д.

Предложение 8. *Если длины неповторяющихся цепей квазиидеалов в категории представлений кольца Λ не превосходят n, то во всяком модуле A из категории представлений найдется цепь $A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_m = 0$ такая, что $B_i = A_{i-1}/A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ распадается в прямую сумму квазиидеалов, причем $m \leqslant n$.*

Рассмотрим U_A — некоторое множество строгих подмодулей модуля A. Будем считать, что строгий подмодуль C модуля A тогда и только тогда содержится в U_A, когда в $D = A/C$ существует возрастающая цепь строгих подмодулей $0 = D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_k = D$ такая, что D_i/D_{i-1} — квазиидеал и $\varphi(D_1) = \varphi(D_2/D_1) = \ldots = \varphi(D/D_{k-1}) = \psi(D) = \psi(A)$. Выберем теперь, используя предложение 2, в качестве A_1 какой-либо минимальный строгий подмодуль из U_A. Тогда из предложения 7 следует, что A/A_1 распадается в прямую сумму квазиидеалов. Заметим, что $\psi(A_1) > \psi(A)$. Действительно, если бы $\psi(A_1) = \psi(A)$, то нашелся бы в модуле A_1 строгий подмодуль X такой, что $\varphi(A_1/X) = \psi(A)$, но тогда X содержался бы в U_A, что противоречило бы минимальности A_1.

Итак, мы нашли в модуле A строгий подмодуль A_1 такой, что A/A_1 распадается в прямую сумму квазиидеалов, и такой, что $\psi(A_1) > \psi(A)$. Таким же образом найдем

$$A_2 \subset A_1,\ A_3 \subset A_2,\ \ldots,\ A_{m-1} \subset A_{m-2}$$

такие, что A_{i-1}/A_i распадается в прямую сумму квазиидеалов и $\psi(A_{i+1}) > \psi(A_i)$, а значит, $m \leqslant n$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Д. К. Фаддееву за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Картан и С. Эйленберг, Гомологическая алгебра, Изд-во иностранной лит., М., 1960.

Поступила 22.IX 1962 г.
Киев