О некоторых приближенных методах решения нелинейных уравнений в координатном банаховом пространстве

Н. С. Курпель

1. Пусть E — пространство ограниченных последовательностей $u = \{u_i\}$ (конечных или бесконечных), где u_i — элементы некоторых банаховых пространств B_i соответственно. Под ограниченной понимаем последовательность $u = \{u_i\}$, для которой $\| u_i \|_{B_i} \leqslant C < \infty$ (символ $\| u_i \|_{B_i}$ обозначает норму элемента u_i в соответствующем пространстве B_i).

Определим в пространстве E норму $\| u \|$ элемента u равенством

$$\| u \| = \sup_i \| u_i \|_{B_i}. \tag{1}$$

Операции сложения элементов, а также умножения их на число определим как в обычном векторном пространстве, т. е. покоординатно.

Рассмотрим в пространстве E операции проектирования P и Π ($P = P^2$; $\Pi = \Pi^2$), определяемые соответственно равенствами

$$Pu = \{u_i^{(P)}\}, \quad u_i^{(P)} = \begin{cases} u_i & \text{при } i = 1, 2, \ldots, N, \\ 0 & \text{при } i = N + 1, \ldots, \end{cases}$$

$$\Pi u = \{P_i u_i\},$$

где N — некоторое натуральное число (в случае, когда последовательности u состоят из k членов, то $N \leqslant k$), P_i — операции проектирования соответственно в пространствах B_i.

Обозначим через R произведение операций P и Π, т. е. их последовательное применение ($R = P\Pi = \Pi P$). Очевидно,

$$Ru = \{u_i^{(R)}\}, \quad u_i^{(R)} = \begin{cases} P_i u_i & \text{при } i = 1, 2, \ldots, N, \\ 0 & \text{при } i = N + 1, \ldots, \end{cases}$$

Операции $Q_P = I - P$, $Q_\Pi = I - \Pi$, $Q_R = I - R$ (I — тождественный оператор) также являются операциями проектирования, и

$$Q_P u = \{\overline{u}_i^{(P)}\}, \quad \overline{u}_i^{(P)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 1, 2, \ldots, N, \\ u_i & \text{при } i = N + 1, \ldots, \end{cases}$$

$$Q_\Pi u = \{Q_i u_i\},$$

$$Q_R u = \{\overline{u}_i^{(R)}\}, \quad \overline{u}_i^{(R)} = \begin{cases} Q_i u_i & \text{при } i = 1, 2, \ldots N, \\ u_i & \text{при } i = N + 1, \ldots . \end{cases}$$

Легко показать, что для произвольных $u, v \in E$ имеет место соотношение

$$\| Ru + Q_R v \| = \max \{\| Ru + PQ_R v \|, \quad \| Q_P v \|\}. \tag{2}$$

В самом деле, согласно определению рассматриваемых операций имеем

$$Ru + Q_R v = P\Pi u + PQ_R v + Q_P v,$$

откуда, принимая во внимание тот факт, что для любых $u, v \in E$ имеет место соотношение

$$\| Pu + Q_P v \| = \max \{\| Pu \|, \quad \| Q_P v \|\},$$

получаем (2).

Если B_i — гильбертовы пространства, а P_i — операторы ортогонального проектирования, т. е. $P_i = P_i^2$ и P_i — самосопряженные, то для произвольных $u, v \in E$ имеет место соотношение

$$\| Ru + Q_R v \|^2 = \max \{\| Ru \|^2 + \| PQ_R v \|^2, \quad \| Q_P v \|^2\}, \tag{3}$$

которое получается из соотношения (2), если учесть, что при указанных условиях

$$\| P_i u_i + Q_i v_i \|_{B_i}^2 = \| P_i u_i \|_{B_i}^2 + \| Q_i v_i \|_{B_i}^2.$$

2. Рассмотрим в пространстве E уравнение

$$u = Tu, \tag{4}$$

где T — нелинейный оператор, действующий из E в E. Будем решать уравнение (4) проекционным методом [1] с оператором проектирования R, т. е. вместо уравнения (4) будем рассматривать близкое к нему уравнение

$$v = RTv, \tag{5}$$

решение которого принимаем за приближенное решение исходного уравнения (4).

Используя свойство (2), можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если в некоторой области G пространства E уравнение* (4) *имеет решение u^*, а уравнение* (5) — *решение v, то оценка погрешности $\|u^* - v\|$ дается неравенством*

$$\| u^* - v \| \leqslant \max \{(1 - q_{Q_P T})^{-1} \| Q_P Tv\|, \quad (1 - q_{PT})^{-1} \| PQ_R Tv \|\} \tag{6}$$

здесь и далее буква q с индексом обозначает константу Липшица соответствующего оператора в области G или же какую-нибудь оценку константы Липшица в этой области).

Доказательство. Так как u^* и v — соответственно решения уравнений (4) и (5), то имеем, очевидно,

$$u^* - v = Tu^* - RTv + RTu^* - RTu^* = RTu^* - RTv + Q_R Tu^*$$

и в силу (2)

$$\| u^* - v \| \leqslant \max \{\| (RTu^* - RTv) + PQ_R Tu^* \|, \ \| Q_P Tu^* \|\}.$$

Если $\| u^* - v \| \leqslant \| Q_P Tu^* \|$, то

$$\| u^* - v \| \leqslant \| Q_P Tu^* - Q_P Tv + Q_P Tv \| \leqslant \| Q_P Tu^* - Q_P Tv \| +$$
$$+ \| Q_P Tv \| \leqslant q_{Q_P T} \| u^* - v \| + \| Q_P Tv \|,$$

откуда

$$\| u^* - v \| \leqslant (1 - q_{Q_P T})^{-1} \| Q_P Tv \|. \tag{7}$$

Если же $\| u^* - v \| \leqslant \| RTu^* - RTv + PQ_R Tu^* \|$, то имеем

$$\| u^* - v \| \leqslant \| RTu^* - RTv + PQ_R Tu^* - PQ_R Tv + PQ_R Tv \| \leqslant$$
$$\leqslant \| (PT) u^* - (PT) v \| + \| PQ_R Tv \| \leqslant q_{PT} \| u^* - v \| + \| PQ_R Tv \|,$$

откуда
$$\| u^* - v \| \leqslant (1 - q_{PT})^{-1} \| PQ_R Tv \|. \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), находим оценку (6).

3. Установим теперь некоторые достаточные условия сходимости и оценки погрешности одного обобщения метода осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова [2 — 9], которое заключается в том, что последовательные приближения u_n искомого решения уравнения (4) определяются из уравнения

$$u_{(n)} = Q_R Tu_{(n-1)} + RTu_{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

(u_0 — произвольный элемент из E).

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Если для всего пространства E выполнено условие*

$$\max \{ q_{PQ_R T} + q_{RT}, q_{Q_P T} \} < 1, \tag{10}$$

то последовательные приближения u_n, определяемые уравнением (9), *сходятся к единственному в пространстве E решению уравнения* (4) *с оценкой погрешности*

$$\| u^* - v \| \leqslant \varepsilon (1 - \varepsilon)^{-1} \| \delta_{(n)} \| \leqslant \varepsilon^{n-\nu} (1 - \varepsilon)^{-1} \| \delta_{(\nu+1)} \| \quad (0 \leqslant \nu \leqslant n - 1), \tag{11}$$

где
$$\varepsilon = \max \{ q_{PQ_R T} (1 - q_{RT})^{-1}, q_{Q_P T} \} < 1,$$
$$\delta_{(\nu+1)} = u_{(\nu+1)} - u_{(\nu)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (9), используя свойство (2), получаем

$$\| \delta_{(n)} \| = \| Q_R Tu_{(n-1)} - Q_R Tu_{(n-2)} + RTu_{(n)} - RTu_{(n-1)} \| =$$
$$= \max \{ \| RTu_{(n)} - RTu_{(n-1)} + PQ_R Tu_{(n-1)} - PQ_R Tu_{(n-2)} \|,$$
$$\| Q_P Tu_{(n-1)} - Q_P Tu_{(n-2)} \| \} \leqslant \max \{ \| RTu_{(n)} - RTu_{(n-1)} \| + \| PQ_R Tu_{(n-1)} -$$
$$- PQ_R Tu_{(n-2)} \|, \quad \| Q_P Tu_{(n-1)} - Q_P Tu_{(n-2)} \| \} \leqslant \max \{ q_{RT} \| \delta_{(n)} \| +$$
$$+ q_{PQ_R T} \| \delta_{(n-1)} \|, \quad q_{Q_P T} \| \delta_{(n-1)} \|, \tag{12}$$

откуда легко получаем

$$\| \delta_{(n)} \| \leqslant \varepsilon \| \delta_{(n-1)} \| \leqslant \varepsilon^{n-\nu-1} \| \delta_{\nu+1)} \|.$$

Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна; поэтому в силу полноты пространства она сходится к единственному пределу $u^* \in E$, который, как нетрудно убедиться, и представляет собой единственное решение уравнения (4).

Оценка погрешности (11) получается из неравенства

$$\| u_{(n+p)} - u_{(n)} \| = \| \delta_{(n+p)} \| + \ldots + \| \delta_{(n+1)} \| \leqslant (\overset{p-1}{\varepsilon^{n+p}} + \ldots + 1) \| \delta_{(n+1)} \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon (1 - \varepsilon)^{-1} \| \delta_{(n)} \| \leqslant \varepsilon^{n-\nu} (1 - \varepsilon)^{-1} \| \delta_{(\nu+1)} \|, \tag{13}$$

если перейти к пределу при $p \to \infty$.

С л е д с т в и е. Если B_i — гильбертовы пространства и P_i — самосопряженные операторы проектирования, то достаточным условием сходимости процесса может быть условие

$$\max\left\{\sqrt{q^2_{PQ_RT}+q^2_{RT}},\ q_{Q_PT}\right\}<1.$$

При этом в оценке (11) можно взять

$$\varepsilon=\max\{q_{PQ_RT}(1-q^2_{RT})^{-\frac{1}{2}},\quad q_{Q_PT}\}. \tag{14}$$

Для доказательства следует применить свойство (3).

4. Пусть $Tu=\{T_iu\}$ и для операторов T_i в некоторой области $D(\|u_i-g_i\|\leqslant M_i)$, где g_i — постоянные элементы пространства E, а M_i подлежат определению, известны оценки

$$\|P_iT_iu-P_ig_i\|_{B_i}\leqslant F^{(i)}_R(M_1, M_2, \ldots),\quad i=1, 2, \ldots, N,$$

$$\|Q_iT_iu-Q_ig_i\|_{B_i}\leqslant F^{(i)}_{PQ_R}(M_1, M_2, \ldots),\quad i=1, 2, \ldots, N,$$

$$\|T_iu-g_i\|_{B_i}\leqslant F^{(i)}_{Q_P}(M_1, M_2, \ldots),\quad i=N+1, \ldots .$$

Теорема 3. *Если бесконечная система неравенств*

$$F^{(i)}_R(M_1 M_2, \ldots)+F^{(i)}_{PQ_R}(M_1, M_2, \ldots)\leqslant M_i,\quad i=1, 2, \ldots, N,$$

$$F^{(i)}_{Q_P}(M_1, M_2, \ldots)\leqslant M_i,\quad i=N+1, \ldots \tag{15}$$

имеет решение $M_i\geqslant 0$ и для области D выполнены условия теоремы 2, то (9) разрешимо в этой области при любом $u_0\in D$ и последовательность $\{u_n\}$ сходится к единственному в D решению уравнения (4) с оценкой погрешности (11).

Следствие. Если B_i — гильбертовы пространства и P_i самосопряженные операторы проектирования, то вместо системы (15) можно взять систему

$$\begin{gathered}[F^{(i)}_R(M_1, M_2, \ldots)]^2+[F^{(i)}_{PQ_R}(M_1, M_2, \ldots)]^2\leqslant M_i^2,\quad i=1, 2, \ldots, N,\\ F^{(i)}_{Q_P}(M_1, M_2, \ldots)\leqslant M_i,\quad i=N+1, \ldots .\end{gathered} \tag{16}$$

5. В качестве примера рассмотрим счетную систему нелинейных интегральных уравнений

$$u_i(x)=\varphi_i(x)+\int_0^1 K_i(x, \xi)f_i[\xi, u(\xi), u_2(\xi), \ldots]\,d\xi\quad (i=1, 2, \ldots) \tag{17}$$

в предположении, что функции $\varphi_i(x)$, интегрируемы с квадратом на отрезке $[0, 1]$ и $\int_0^1|\varphi_i(x)|^2dx\leqslant\varphi_i<\Phi$, а функции $K_i(x, \xi)$ интегрируемы с квадратом в области $x,\ \xi\in[0, 1]$ и $\int_0^1\int_0^1|K_i(x, \xi)|^2\,dxd\xi\leqslant K_i<K$. Относительно функций $f_i(\xi, u_1, u_2, \ldots)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям

$$|f_i(\xi, u_1, u_2, \ldots)-f_i(\xi, \bar u_1, \bar u_2, \ldots)|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}c_{ij}(\xi)\,|u_j-\bar u_j|$$

в некоторой области $\xi\in[0, 1]$, $|u_i-\varphi_i|\leqslant M_i<M$. При указанных предположениях систему (17) можно рассматривать как частный случай нели-

нейного уравнения (4) с оператором T, определяемым формулой

$$Tu = \{T_i u\}, \quad T_i u = \varphi_i(x) + \int_0^1 K_i(x, \xi) f_i[\xi, u_1(\xi), u_2(\xi), \ldots] \, d\xi$$

в пространстве ограниченных последовательностей функций, принадлежащих пространству L_2.

Определим, например, операции P_i как операции ортогонального проектирования элементов $u_i \in L_2$ на первые $k^{(i)}$ элементов соответствующего ортонормированного базиса $\{e_j^{(i)}\}$, т. е.

$$P_i u_i = \sum_{j=1}^{k^{(i)}} \alpha_j^{(i)} e_j^{(i)},$$

где $\alpha_j^{(i)} = \int_0^1 u_i(x) \, e_j^{(i)}(x) \, dx$.

Применяя к системе (17) алгоритм п. 3 при указанном выборе операторов P_i, будем определять u_n из системы

$$u_{i(n)}(x) = \varphi_i(x) + \int_0^1 [K_i(x, \xi) - \overline{K}_i(x, \xi)] f_i[\xi, u_{1(n-1)}(\xi), u_{2(n-1)}(\xi), \ldots] \, d\xi +$$

$$+ \int_0^1 \overline{K}_i(x, \xi) f_i[\xi, u_{1(n)}(\xi), u_{2(n)}(\xi), \ldots] \, d\xi, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$u_{i(n)}(x) = \varphi_i(x) + \int_0^1 K_i(x, \xi) f_i[\xi, u_{1(n-1)}(\xi), u_{2(n-1)}(\xi), \ldots] \, d\xi, \quad i = N + 1, \ldots,$$

где

$$\overline{K}_i(x, \xi) = \sum_{j=1}^{k^{(i)}} \beta_j^{(i)}(\xi) \, e_j^{(i)}(x), \qquad \beta_j^{(i)}(\xi) = \int_0^1 K_i(x, \xi) \, e_j^{(i)}(x) \, dx.$$

Входящие оценки констант Липшица можно легко получить, применяя неравенство Коши—Буняковского.

Имеем

$$q^2_{Q_P T} \leqslant \overline{q}^2_{Q_P T} = \sup_{i=N+1,\ldots} \int_0^1 \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \Big(\int_0^1 |K_i(x, \xi)|^2 c_{ij}^2(\xi) \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]^2 dx;$$

$$q^2_{RT} \leqslant \overline{q}^2_{RT} = \sup_{i=1,\ldots,N} \int_0^1 \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \Big(\int_0^1 |\overline{K}_i(x, \xi)|^2 c_{ij}^2(\xi) \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]^2 dx;$$

$$q^2_{PQ_R T} \leqslant \overline{q}^2_{PQ_R T} = \sup_{i=1,\ldots,N} \int_0^1 \Big[\sum_{j=1}^{\infty} \Big(\int_0^1 |K_i(x, \xi) - \overline{K}_i(x, \xi)|^2 c_{ij}^2(\xi) \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \Big]^2 dx.$$

Так как пространства L_2 гильбертовы, а P_i — самосопряженные операторы по предположению, то можно пользоваться условием сходимости (14) и в качестве ε взять его оценку

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_1 = \max \{\overline{q}_{PQ_R T}(1 - \overline{q}^2_{RT})^{-\frac{1}{2}}, \ \overline{q}_{Q_P T}\} < 1.$$

Если взять $g_i = \varphi_i(x)$, то можно найти оценки

$$F_R^{(i)}(M_1, M_2, \ldots) = L_R^{(i)} F^{(i)}(M_1, M_2, \ldots), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$F^{(i)}_{PQ_R}(M_1, M_2, \dots) = L^{(i)}_{PQ_R} F^{(i)}(M_1, M_2, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$F^{(i)}_{Q_P}(M_1, M_2, \dots) = L^{(i)}_{Q_P} F^{(i)}(M_1, M_2, \dots), \quad i = N+1, \dots,$$

где

$$L^{(i)}_R = \sqrt{\int_0^1\int_0^1 |\overline{K}_i(x, \xi)|^2 dx d\xi}, \qquad L^{(i)}_{PQ_R} = \sqrt{\int_0^1\int_0^1 |K_i(x, \xi) - \overline{K}_i(x, \xi)|^2 dx d\xi},$$

$$L^{(i)}_{Q_P} = \sqrt{\int_0^1\int_0^1 |K_i(x, \xi)|^2 dx d\xi},$$

$$F^{(i)}(M_1, M_2, \dots) \geqslant |f_i(\xi, u_1, u_2, \dots)|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
2. Ю. Д. Соколов, Про один метод наближеного розв'язання лінійних інтегральних та диференціальних рівнянь, ДАН УРСР, № 2, 1955.
3. Ю. Д. Соколов, О применении метода осреднения функциональных поправок к нелинейным интегральным уравнениям, УМЖ, т. IX, № 4, 1957.
4. Ю. Д. Соколов, Об одном методе приближенного решения нелинейных интегральных уравнений с переменными пределами, УМЖ, т. X, 1958.
5. Ю. Д. Соколов, Об одном методе приближенного решения систем нелинейных интегральных уравнений с постоянными пределами, УМЖ, т. XV, № 1, 1963.
6. Э. А. Чернышенко, Исследование сходимости и установление оценки погрешности метода усреднения в полном нормированном пространстве, УМЖ, т. VI, № 3, 1954.
7. Е. А. Чернишенко, Про один варіант методу осереднення, ДАН УРСР, № 1, 1956.
8. А. Ю. Лучка, Приближенное решение линейных операторных уравнений в пространстве Банаха методом Ю. Д. Соколова, УМЖ, т. XIII, № 1, 1961.
9. А. Ю. Лучка, Наближене розв'язання безконечних систем лінійних інтегральних рівнянь методом Ю. Д. Соколова, ДАН УРСР, № 9, 1962.

Поступила 4.V 1963 г.
Киев