Критерий полноты системы корневых векторов сжатия

И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн

Цель этого сообщения — установить теорему о полноте системы корневых векторов оператора сжатия. Эту теорему можно рассматривать как некоторый аналог соответствующей теоремы М. С. Лившица [1] о полноте системы корневых векторов диссипативного оператора.

1. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{R}$— кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}_\infty$ — двусторонний идеал кольца $\mathfrak{R}$, состоящий из всех вполне непрерывных операторов, и $\mathfrak{S}_1$— двусторонний идеал в $\mathfrak{R}$, состоящий из всех ядерных операторов (см. [2]).

Напомним, что оператор A $(\in\mathfrak{S}_\infty)$ называется *ядерным*, если ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A\varphi_j, \varphi_j) \tag{1}$$

сходится для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_1^\infty$ пространства $\mathfrak{H}$.

Оператор $A(\in\mathfrak{R})$ является ядерным в том и только в том случае, когда $\mathrm{Sp}\,[(A^*A)^{1/2}] < \infty$. Для всякого ядерного оператора

$$\sum |\lambda_j(A)| \leqslant \mathrm{Sp}\,[(A^*A)^{1/2}],$$

где $\{\lambda_j(A)\}$ — полная система ненулевых собственных чисел оператора A. Полнота этой системы означает, что всякое собственное число фигурирует в нем столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Всякому оператору $I - A$, где $A\in\mathfrak{S}_1$ можно сопоставить определитель $\det(I-A)$, определяемый равенством

$$\det(I-A) = \prod_j (1-\lambda_j(A)),$$

если оператор A имеет хотя бы одно ненулевое собственное число, и равенством $\det(I-A)=1$ в случае отсутствия таковых.

Из самого определения $\det(I-A)$ следует, что, *если* $A\in\mathfrak{S}_1$, *а* $B\,(\in\mathfrak{R})$ — *обратимый оператор, то*

$$\det(I-A) = \det(I-BAB^{-1}).$$

Приведем без доказательства два простых свойства определителя, используемых в дальнейшем.

1°. *Пусть* $A \in \mathfrak{S}_1$. *Тогда для любой возрастающей последовательности ортогональных проекторов* $P_n\,(n = 1, 2, \ldots)$, *стремящихся сильно к единичному оператору,*

$$\lim_{n\to\infty} \det (I - P_n A P_n) = \det (I - A).$$

2°. *Если операторы* A_1 *и* $A_2 \in \mathfrak{S}_1$, то

$$\det [(I - A_1)(I - A_2)] = \det (I - A_1) \det (I - A_2).$$

2. Предпошлем формулировке нашей теоремы еще следующие замечания.

3°. *Если* $A\,(\in \mathfrak{R})$ — *обратимый оператор, а оператор* $A^*A - I$ — *ядерный, то полярное представление оператора* A *имеет вид*

$$A = U(I + G), \tag{2}$$

где U — *унитарный оператор*, а $G \in \mathfrak{S}_1$.

Из теоремы об операторах, аналитически зависящих от параметра (см. [3], теорему 3.7), можно легко вывести, что у всякого обратимого оператора вида (2) часть спектра, не лежащая на единичной окружности, состоит из изолированных собственных чисел, которым отвечают конечномерные нормально отщепляющиеся корневые подпространства (см. [3], § 4). Все эти собственные числа занумеруем как-либо, считая каждое столько раз, какова его алгебраическая кратность. Эту последовательность будем обозначать через $\{\lambda_j'(A)\}$.

Оператор $A(\in \mathfrak{R})$ называется *сжатием*, если $|A| \leqslant 1$.

Сжатие A называется *простым*, если ни на одном инвариантном подпространстве оно не индуцирует унитарного оператора.

Как показано в [4, 9], всякое сжатие распадается в ортогональную сумму унитарного оператора и простого сжатия.

Имеет место

Теорема. *Пусть* $A\,(\in \mathfrak{R})$ — *произвольный обратимый оператор, являющийся сжатием и* $A^*A - I \in \mathfrak{S}_1$.

Тогда

$$\det (A^*A) \leqslant \prod_j |\lambda_j'(A)|^2. \tag{3}$$

Если, кроме того, оператор A *простой или* $A - I \in \mathfrak{S}_\infty$, *то в* (3) *имеет место знак равенства в том и только в том случае, когда система всех корневых векторов оператора* A *полна в* $\mathfrak{H}$.

3. Доказательство теоремы опирается на две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $A\,(\in \mathfrak{R})$ — *обратимый оператор, для которого* $A^*A - I \in \mathfrak{S}_1$. *Если* $\mathfrak{E}$ — *линейная замкнутая оболочка всех корневых векторов оператора* A, *отвечающих собственным числам* $\lambda_j'(A)$, *а* P — *ортогональный проектор, проектирующий* $\mathfrak{H}$ *на* $\mathfrak{E}$, *то*

$$\det (PA^*AP + Q) = \prod_j |\lambda_j'(A)|^2, \tag{4}$$

где $Q = I - P$.

В частности, если указанное множество корневых векторов плотно в $\mathfrak{H}$, *т. е.* $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$, *то*

$$\det (A^*A) = \prod_j |\lambda_j'(A)|^2. \tag{5}$$

Доказательство. Легко видеть, что равенство (4) будет доказано, коль скоро будет установлено равенство (5). В каждом корневом подпространстве оператора A, отвечающем собственным числам из $\{\lambda_j'(A)\}$, выберем жорданов базис и последовательно перенумеруем векторы этих базисов.

Тогда получим последовательность $\{\varphi_j\}$, для каждого вектора которой выполняется одно из двух равенств

$$A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j \quad \text{или} \quad A\varphi_j = \lambda_j\varphi_j + \varphi_{j-1} \quad (\lambda_j = \lambda'_j(A)).$$

Легко видеть, что ортонормированный базис $\{\omega_j\}$ пространства $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$, получающийся из системы $\{\varphi_j\}$ путем последовательной ортогонализации, будет обладать следующим свойством

$$A\omega_j = a_{j_1}\omega_1 + a_{j_2}\omega_2 + \ldots + \lambda'_j(A)\,\omega_j \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через P_n ортогональный проектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на подпространство с базисом $\{\omega_j\}_1^n$. Очевидно, $AP_n = P_nAP_n$, и, следовательно, $P_nA^*P_nAP_n = P_nA^*AP_n$. Так как

$$\det(A^*A) = \lim_{n\to\infty}\det(P_nA^*AP_n + Q_n) = \lim_{n\to\infty}\det(P_nA^*P_nAP_n + Q_n) \quad (Q_n = I - P_n),$$

а

$$\det(P_nA^*P_nAP_n + Q_n) = \det(P_nA^*P_n + Q_n)\det(P_nAP_n + Q_n) = \prod_{j=1}^{n} |\lambda'_j(A)|^2,$$

то получаем (5).

Следующая лемма носит совершенно общий характер.

Лемма 2. *Пусть $A(\in\mathfrak{R})$ — произвольный обратимый оператор, для которого $A^*A - I \in \mathfrak{S}_1$.*

Если $\mathfrak{L}$ является инвариантным подпространством каждого из операторов A и A^{-1}, то

$$\det(A^*A) = \det(PA^*AP + Q)\det(QA^*QAQ + P), \tag{6}$$

где P — ортогональный проектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}$, а $Q = I - P$.

Доказательство. Так как $QAP = QPAP = 0$, то оператор A представим в виде

$$A = (P + Q)A(P + Q) = PAP + PAQ + QAQ.$$

Отсюда следует, что

$$A = (QAQ + P)(I + PAQ)(Q + PAP). \tag{7}$$

Оператор $B_1 = Q + PAP$ имеет ограниченный обратный

$$B_1^{-1} = Q + PA^{-1}P.$$

Квадрат оператора PAQ равен нулю, а следовательно, обратим и оператор $B_2 = I + PAQ$. А тогда из (7) следует, что оператор $B_3 = QAQ + P$ также обратим.

Так как оператор

$$B_1^*B_1 - I = PA^*PAP + Q - I = P(A^*A - I)P$$

ядерный, то ядерным будет и оператор

$$B_1B_1^* - I = (B_1^*)^{-1}(B_1^*B_1 - I)B_1^*.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\det(B_1B_1^*) = \det(B_1^*B_1).$$

Учитывая, далее, равенство

$$B_1A^*AB_1^{-1} = B_1B_1^*B_2^*B_3^*B_3B_2\,(= B_1B_1^*M),$$

находим, что оператор $M - I \in \mathfrak{S}_1$ и

$$\det(A^*A) = \det(B_1^*B_1)\det M.$$

Аналогичным образом из равенства

$$B_2MB_2^{-1} = B_2B_2^*B_3^*B_3$$

выводим, что оператор $B_2B_2^*B_3^*B_3 - I \in \mathfrak{S}_1$ и

$$\det M = \det(B_2B_2^*B_3^*B_3). \tag{8}$$

Оператор $B_3B_3^* - I = P + QAQA^*Q - I = Q(A^*)^{-1}(A^*A - I)A^*Q$ и, стало быть, является ядерным. Кроме того, $B_3^*B_3 - I = B_3^{-1}(B_3B_3^* - I)B_3$. Следовательно,

$$\det(B_3^*B_3) = \det(B_3B_3^*). \tag{9}$$

Из вышедоказанного вытекает, что оператор $B_2B_2^* - I = PAQ + QA^*P + PAQA^*P \in \mathfrak{S}_1$, а вместе с ним и оператор $B_2 - I = P(B_2B_2^* - I)Q \in \mathfrak{S}_1$.

Так как у оператора PAQ ($(PAQ)^2 = 0$) нет ненулевых собственных чисел, то

$$\det B_2 = \det B_2^* = 1. \tag{10}$$

Сопоставляя равенства (7)—(10), приходим к (6).

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы. Пусть по-прежнему $\mathfrak{E}$ — замыкание линейной оболочки всех корневых векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_j'(A)$, а P — ортогональный проектор, проектирующий пространство $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{E}$.

Очевидно, $\mathfrak{E}$ является инвариантным подпространством операторов A и A^{-1}. Следовательно, в силу леммы 2

$$\det(A^*A) = \det(PA^*AP + Q)\det(P + QA^*QAQ). \tag{11}$$

Неотрицательный оператор

$$P + QA^*QAQ = I - (Q - QA^*QAQ) \leqslant I,$$

и, стало быть,

$$\det(P + QA^*QAQ) \leqslant 1. \tag{12}$$

Принимая во внимание (4), (11) и (12), приходим к соотношению (3).

В соотношении (3) имеет место знак = в том и только в том случае, когда этот знак имеет место в (12), а последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$QA^*QAQ = Q. \tag{13}$$

В этом случае

$$(Q \geqslant)\, QA^*AQ = QA^*QAQ + QA^*PAQ = Q + QA^*PAQ,$$

откуда следует, что $PAQ = 0$, и, стало быть, $Q\mathfrak{H}$ — инвариантное подпространство оператора A. Так как, кроме того, $P\mathfrak{H}$ инвариантно относительно A и A обратим, то A распадается в ортогональную сумму двух обратимых операторов. Оператор, отвечающий подпространству $Q\mathfrak{H}$, является, в силу (13), унитарным.

Если A — простое сжатие, то $Q = 0$, и, стало быть $\mathfrak{E} = \mathfrak{H}$. Если же $A - I$ — вполне непрерывный оператор, то в подпространстве $Q\mathfrak{H}$ унитарное сужение оператора A имеет полную систему собственных векторов.

Теорема доказана.

Близкую теорему к доказанной, но более сложно формулируемую, установил В. Т. Поляцкий [5]. При доказательстве своего результата В. Т. Поляцкий использовал полученные им треугольные модели «квазиунитарных» операторов. Для построения этих моделей ему пришлось привлечь глубокие исследования В. П. Потапова [6] и Ю. П. Гинзбурга [7] по теории аналитических матриц и оператор-функций.

Как известно, М. С. Лившиц свою теорему о полноте также установил с помощью найденной им треугольной модели операторов, а затем Б. Р. Мукминов [8] нашел для нее простое и элементарное доказательство.

Замечание. Теорема, эквивалентная доказанной, может быть сформулирована и для растяжения, т. е. для оператора $A (\in \mathfrak{R})$, обладающего свойством $|Af| \geqslant |f|$. Для такого оператора неравенство (3) переходит в неравенство

$$\det(A^*A) \geqslant \prod_j |\lambda_j'(A)|^2,$$

где $\{\lambda_j'(A)\}$ составляет полную систему собственных чисел оператора A, лежащих вне единичной окружности.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сб., т. 34(76), 1954, 145—198.

2. И. М. Гельфанд и Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, М., 1961.

3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи матем. наук, т. 12, № 2, 1956, 43—118.

4. H. Langer, Ein Zerspaltungssatz fur Operatoren im Hilbertraum, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 12, N 3—4, 1961, 441—445.

5. В. Т. Поляцкий, О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов, ДАН СССР, т. 113, № 4, 1957.

6. В. П. Потапов, Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды Моск. матем. общ-ва, 4, 1955, 125—136.

7. Ю. П. Гинзбург, О J-нерастягивающих оператор-функциях, ДАН СССР, т. 117, № 2, 1957.

8. Б. Р. Мукминов, О разложении по собственным функциям диссипативных ядер, ДАН СССР, т. 99, № 4, 1954, 499—502.

9. B. Sz.-Nagy et C. Foias, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, IV, Acta Sci. Math., 21, N 3, 4, 1960, 251—259.

Поступила 3.V 1963 г.
Кишинев—Одесса