О кривизне кривых на гладкой поверхности в точках, где не существует вторых производных

Э. Н. Ермолаева

В настоящей работе рассматривается класс точек на гладких поверхностях, в которых не существует вторых производных и тем не менее окрестности этих точек устроены аналогично окрестностям обыкновенных точек на регулярных поверхностях.

1. Рассмотрим гладкую поверхность Φ, заданную уравнением $\bar{r}=\bar{r}\,(u, v)$ и точку P на ней. Пусть γ — произвольная кривая на по-

верхности, проходящая через точку P; $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — уравнение этой кривой. Когда в точке P не существуют вторые производные, понятие кривизны кривой γ в этой точке теряет смысл. Однако в таких точках может существовать предел

$$k = 2 \lim_{d \to 0} \frac{h}{d^{\nu}}, \tag{1}$$

где $1 < \nu \leqslant 2$, h и d — расстояния произвольной точки M кривой от касательной к ней в точке P и от точки P соответственно [1].

Назовем этот предел кривизной ν-го порядка и будем обозначать его через k_ν.

Обратим особое внимание на то, что в зависимости от выбора точки на поверхности ν может быть любым числом, заключенным между 1 и 2 ($1 < \nu \leqslant 2$). Следует также отметить, что не всякая кривая в любой своей точке имеет предел (1), в то время как он может существовать и в точках кривой негладкой. В дальнейшем изложении ограничимся рассмотрением точек поверхности, в которых проходящие через них кривые (как гладкие, так и негладкие) имеют кривизну ν-го порядка.

2. Аналогично плоскость α назовем соприкасающейся плоскостью порядка ν кривой γ в точке P, если при $Q \to P$ $\frac{h}{d^{\nu}} \to 0$, где h и d — расстояния произвольной точки Q кривой от плоскости α и точки P соответственно.

3. Гладкую поверхность Φ отнесем к следующей системе координат: рассматриваемую точку P на Φ примем за начало координат, касательную плоскость в точке P — за плоскость xy и нормаль к поверхности в точке P — за ось z.

Пусть U — поверхность, которая в этой системе координат записывается уравнением

$$z = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{\nu}{2}}, \text{ где } 1 < \nu \leqslant 2.$$

Назовем эту поверхность параболоидом порядка ν. Будем говорить, что параболоид U является соприкасающимся порядка ν для поверхности Φ в точке P, если отношение $\frac{h}{d^{\nu}} \to 0$, когда $Q \to P$, где h и d — расстояния произвольной точки Q поверхности от параболоида и точки P соответственно.

4. Приведем без доказательства следующие две леммы:

Лемма 1. *Пусть поверхность Φ в точке P имеет соприкасающийся параболоид U порядка ν. Кривая γ', являющаяся ортогональной проекцией на U кривой γ, взятой на поверхности Φ и проходящей через точку P, будет иметь соприкосновение порядка ν с кривой γ.*

Замечание. Фактически смысл леммы заключается в том, что для всех кривых, удовлетворяющих условию леммы, как гладких, так и негладких, имеет место свойство взаимности соприкосновения [2].

Лемма 2. *Если плоскость α является соприкасающейся порядка ν в точке P кривой γ_1, а кривая γ_2 имеет с кривой γ_1 в этой точке соприкосновение порядка ν, то плоскость α будет в точке P соприкасающейся порядка ν и для кривой γ_2.*

Из этих двух лемм следует, что все свойства кривых на поверхности, проходящих через точку P, связанные с понятием соприкосновения, аналогичны свойствам ортогональных проекций этих кривых на соприкасающийся параболоид. Поэтому изучение свойств на поверхности в окрестности точки P можно заменить изучением свойств кривых на соприкасающемся параболоиде.

5. Пусть дан параболоид порядка ν

$$z = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{\nu}{2}} \quad (1 < \nu \leqslant 2) \tag{2}$$

и произвольная, проходящая через его вершину плоскость

$$z = fx + gy. \tag{3}$$

Будем рассматривать на параболоиде кривые, имеющие плоскость (3) своей соприкасающейся плоскостью в точке $O(0, 0)$ и прямую

$$\begin{cases} z = fx + gy \\ z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

своей касательной.

Проведем нормальное сечение параболоида через касательную (4). Имеет место следующая теорема.

Теорема. *У всех кривых на параболоиде*

$$z = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{\nu}{2}},$$

имеющих в его вершине общую касательную и общую соприкасающуюся плоскость с порядком соприкосновения, равным ν, существует в этой точке кривизна порядка ν. Для кривизн этих кривых в вершине параболоида имеет место соотношение, аналогичное теореме Менье.

Доказательство. Так как кривая γ на параболоиде (2) имеет плоскость (3) своей соприкасающейся плоскостью порядка ν в точке $O(0, 0)$, то для произвольной точки Q кривой γ, стремящейся к O, выполняется условие

$$\frac{h_1}{OQ^\nu} = \frac{fx + gy - z}{\sqrt{f^2 + g^2 + 1}\,(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\nu}{2}}} \to 0, \tag{5}$$

где h_1 — расстояние от точки Q до плоскости (3), x, y, z — текущие координаты точки Q.

Покажем, что при выполнении всех условий теоремы кривая γ имеет кривизну порядка ν, и получим выражение для этой кривизны. По определению, кривая имеет кривизну, если существует предел

$$2 \lim_{OQ \to 0} \frac{h_2}{OQ^\nu} = k_\nu,$$

где h_2 — расстояние от произвольной точки Q кривой до касательной (4). В нашем случае

$$\lim_{OQ \to 0} \frac{h_2}{OQ^\nu} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + f^2}} \lim_{Q \to O} \sqrt{\frac{(fx + gy)^2 + (g^2 + f^2) z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^\nu}}. \tag{6}$$

Поскольку кривая γ имеет прямую (4) своей касательной, то при $Q \to O$ выполняется условие

$$\frac{y}{x} \to -\frac{f}{g}. \tag{7}$$

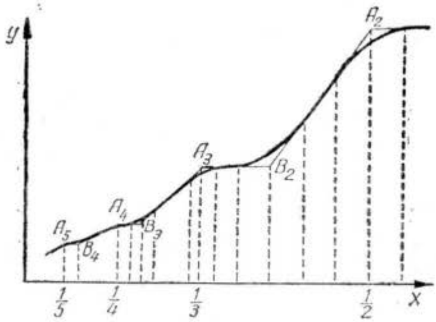
Используя (7) и уравнение параболоида (2), получаем

$$\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\nu}{2}}} \xrightarrow[Q \to O]{} \left(\frac{ag^2 - 2bfg + cf^2}{g^2 + f^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}. \tag{8}$$

Используя (5) и (8), из формулы (6) найдем

$$k_\nu = 2\sqrt{\frac{g^2+f^2+1}{g^2+f^2}}\left(\frac{ag^2-2bfg+cf^2}{g^2+f^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}.$$

Аналогично находим кривизну нормального сечения параболоида плоскостью $fx+gy=0$:



$$k_{\nu,\,n} = 2\left(\frac{ag^2-2bfg+cf^2}{g^2+f^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}.$$

Заметив, что $\cos\alpha = \sqrt{\frac{g^2+f^2+1}{g^2+f^2}}$, где α — угол между плоскостями $z=fx+gy$ и $fx+gy=0$, найдем соотношение

$$k_\nu\cdot\cos\alpha = k_{\nu,\,n},$$

которое является обобщением теоремы Менье.

6. Частичный ответ на вопрос о том, насколько широк класс точек на гладкой поверхности, в которых существует соприкасающийся параболоид порядка ν, даст приведенный ниже пример.

Построим гладкую кривую γ на плоскости следующим образом: возьмем множество точек с координатами $A_n\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2}\right)$, $n=2,3,\ldots,$ и найдем множество точек B_n, таких, чтобы B_n была точкой пересечения прямой $y=\frac{1}{(n+1)^2}$ и прямой с угловым коэффициентом $k=\frac{2n}{n^2-1}$, проходящей через точку A_n. Полученные точки соединяем ломаной $A_2B_2A_3B_3\ldots A_nB_n\ldots$. Эта ломаная своими вершинами A_n лежит на параболе $y=x^2$. Каждую вершину A_n и B_n ломаной сгладим вписанными в углы $\angle B_{n-1}A_nB_n$ и $\angle A_nB_nA_{n+1}$ параболами порядка $\frac{2n}{2n-1}$ так, чтобы стороны этих углов были касательными к параболе в точках пересечения ее со сторонами углов (см. рисунок).

Полученную кривую γ_1 отобразим симметрично относительно оси oy. В результате найдем кривую, заданную на отрезке $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$, и обозначим ее через γ. Кривая γ — гладкая во всех точках, в том числе и в точке $O(0,\ 0)$, в которой кривизна кривой равна 2, причем порядок кривизны тоже равен 2. Заметим, что если определить кривизну кривой как предел, к которому стремится отношение угла между касательными в точках M_1, M_2 к дуге $\widetilde{M_1M_2}$, когда точки M_1, M_2, оставаясь на кривой, стремятся к точке O, то в этом смысле кривизна в точке O кривой γ существовать не будет.

Рассмотренную выше кривую можно задать следующими уравнениями:

$$1)\ y=\frac{1}{(n+1)^2}\quad\text{на}\quad\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4(n+1)^3};\quad\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4n^3}\right];$$

$$2)\ 2n^2\left(ny-x+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{2n^3}\right)-(2n-1)\times$$

$$\times\left\{2n\left[y+nx-\frac{1}{2n^2}-\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\right]^n\right\}^{\frac{2}{2n-1}}-\frac{1}{4n^2}=0$$

$$\text{на } \left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4n^3};\quad \frac{1}{n+1}+\frac{3n^2+1}{4n^3(n^2+1)}\right];$$

$$3)\ y-\frac{1}{n^2}-\frac{2n}{n^2-1}\left(x-\frac{1}{n}\right)=0 \text{ на } \left[\frac{1}{n+1}+\frac{3n^2+1}{4n^3(n^2+1)};\ \frac{1}{n}-\frac{n^2-1}{4n^3(n^2+1)}\right];$$

$$4)\quad 2n^2(x-ny)-(2n-1)\left[2n\left(y+nx-1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right]^{\frac{2}{2n-1}}-\frac{1}{4n^2}=0$$

$$\text{на } \left[\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^3}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+1};\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{4n^3}\right].$$

Этими уравнениями кривая γ задается на положительной части оси ox. На отрицательной части она получается симметричным отображением γ_1 относительно оси oy.

Рассмотрим теперь пространственную систему координат x, y, z. Для построения поверхности примем за направляющую построенную гладкую кривую γ, а за образующую возьмем параболу $y = z^{\frac{4}{3}}$.

Таким образом, мы построили поверхность со счетным множеством точек $\{\mathfrak{N}_n\}$ (эти точки — вершины парабол кривой γ), в которых существует соприкасающийся параболоид порядка $\frac{2n}{2n-1}$, вырождающийся в цилиндр, причем порядок соприкосновения параболоидов изменяется от точки к точке из $\{\mathfrak{N}_n\}$.

Итак, существуют гладкие поверхности, имеющие счетное множество точек, в которых не существует вторых производных, но окрестности которых тем не менее устроены аналогично окрестностям регулярных точек поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Выгодский, Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

2. А. В. Погорелов, Лекции по дифференциальной геометрии, Изд-во Харьк. ун-та, 1956.

Поступила 18.X 1960 г.
г. Киев