О свойствах цепей с полными связями

М. Йосифеску, Р. Теодореску

Понятие о цепях с полными связями введено в теорию вероятностей О. Онический и Г. Михоком [3]. Систематическое изложение материала по этой теме дано в монографии [1]. Недавно некоторые новые теоретические стороны этих цепей исследовались в сообщениях [2]. В этой статье изыскания [2] распространяются для случая любого множества состояний, доказывается теорема о существовании, а также, для однородного случая, эргодическая теорема.

1. Введем следующие обозначения: (Ω, K, P) — вероятное пространство; (X, F) — измеримое пространство, где элементы $x \in X$ являются подмножествами F; $X^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} X_j$, $X_j = X$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $n \in N^* = \{1, 2, \ldots\}$; $x^{(n)}$ — элементы $X^{(n)}$; $F^{(n)}$ — σ-алгебра, соответствующая произведению $X^{(n)}$;

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X, F)$ — множество всех вероятностных мер p, определенных на F; M — σ-алгебра подмножеств $\mathfrak{M}$, для которой отображение $p \to p(A)$ M-измеримо для всякого $A \in F$; $(T_x^{(n)})_{x \in X}$ — семейство отображений $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ для каждого $n \in N^x$; $T^{(n)}_{x^{(n)}} = T^{(n)}_{x_1 \ldots x_n} = T^{(n)}_{x_n} \ldots T^{(1)}_{x_1}$; $N = \{0\ 1,\ 2, \ldots\}$.

Определение 1. Последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n \in N^*}$, определенных на Ω и принимающих значения в X, составляет цепь с полными связями, если условная вероятность

$$p_{x_1 \ldots x_n}(A) = P(\xi_{n+1}(\omega) \in A | \xi_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n)_{\substack{\xi_j(\omega) = x_j \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}, \quad A \in F,$$

имеет вид

$$p_{x_1 \ldots x_{n+1}} = T^{(n+1)}_{x_{n+1}} p_{x_1 \ldots x_n}, \quad p_{x_1} = T^{(1)}_{x_1} p$$

для всякого $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$ и $n \in N^*$, где

$$p(A) = P(\xi_1(\omega) \in A), \quad A \in F;$$

из этого определения следует:

$$p_{x_1 \ldots x_n} = T^{(n)}_{x_1 \ldots x_n} p$$

для всякого $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$ и $n \in N^*$.

Определение 2. Последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n \in N^*}$ составляет однородную цепь с полными связями, если переходные отображения $(T_x^{(n)})_{x \in X}$ не зависят от $n \in N^*$; в таком случае

$$p_{x_1 \ldots x_{n+1}} = T_{x_{n+1}} p_{x_1 \ldots x_n}, \quad p_{x_1} = T_{x_1} p$$

для всякого $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$ и $n \in N^*$.

Заметим, как и выше, что из определения 2 следует

$$p_{x_1 \ldots x_n} = T_{x_1 \ldots x_n} p$$

для всякого $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$ и $n \in N^*$.

Примеры. а) Если в однородном случае $T_x p = P(x, \cdot)$ для всякого $p \in \mathfrak{M}$, где $P(x, \cdot) \in \mathfrak{M}$ для всякого $x \in X$, получаем простые и однородные марковские цепи.

б) Если в однородном случае $T_x(k) p = P(x^{(k)}, \cdot)$ при данном $k > 1$ для всякого $p \in \mathfrak{M}$, где $P(x^{(k)}, \cdot) \in \mathfrak{M}$ для всякого $x^{(k)} \in X^{(k)}$, получаем k-сложные и однородные марковские цепи.

в) Если $X = (x_1 \ldots, x_{m+1})$, $m \in N^*$, где $x_1, \ldots, x_{m+1}$ — вещественные числа, $\mathfrak{M} = \Delta = \{(p_1, \ldots, p_m) | 0 \leqslant p_j \leqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ \sum\limits_{j=1}^{m} p_j \leqslant 1\}$, и переходные отображения $T^{(n)}_{x_j}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $n \in N^*$ определяются как отображения $\varphi_i^{(n)}: \Delta \to \Delta'$, данные соотношениями

$$\varphi_i^{(n)}: p'_j = \varphi^{(n)}_{i,j} \quad (p_1, \ldots, p_m), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

получаем случай, рассматриваемый в [3] (см. также [1]); цепь с полными связями стационарна, если $\varphi_i^{(n)}$ не зависят от n.

Предполагаем, что переходные отображения имеют свойство

$$\{(p, x^{(n)}) | T^{(n)}_{x(n)} p \in M\} \in \mathrm{M} \times F^{(n)}$$

для всякого $n \in N^*$ и $M \in \mathrm{M}$.

Теорема 1 (теорема о существовании). *Если дано измеримое пространство (x, F), вероятностная мера $p \in \mathfrak{M}$ и семейство отображений $(T^{(n)}_x)_{x \in X}$, $n \in N^*$, $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$, то существуют вероятностное пространство (Ω, K, P), цепь с полными связями $(\xi_n)_{n \in N^*}$, определенная на этом вероятностном пространстве, имеющая множество состояний X, начальное распределение p и переходные отображения $(T^{(n)}_x)_{x \in X}$.*

Доказательство. Берем для Ω множество всех бесконечных последовательностей $(x_n)_{n \in N^*}$, где каждый $x_n \in X$, т. е. $\Omega = X^{N^*}$. Для последовательности случайных величин $(\xi_n)_{n \in N^*}$ положим

$$\xi_n(\omega) = x_n = p_{r_n}(\omega), \quad n \in N^*,$$

где $\omega = (x_n)_{n \in N^*}$.

Запишем теперь

$$P(\xi_1(\omega) \in A) = p(A), \quad A \in F$$

и

$$P(\xi_1(\omega) \in A_1, \ldots, \xi_n(\omega) \in A_n) =$$

$$= \int_X (p(dx_1) \int_X T^{(1)}_{x_1} p(dx_2) \ldots \int_X T^{(n-1)}_{x_1 \ldots x_{n-1}} p(dx_n) \chi_A(n)(x_1 \ldots x_n); \ n > 1,$$

где $A^{(n)} = A_1 \ldots A_n$, $A_j \in F$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $\chi_A^{(n)}$ является характеристической функцией $A^{(n)}$. Функция p определяет вероятностную меру на σ-алгебре K подмножеств Ω, порождаемых множествами вида

$$\{\xi_j(\omega) \in A\}, \quad j \in N^*, \quad A \in F.$$

На основе этого построения легко проверить, что рассматриваемая последовательность случайных величин $(\xi_n)_{n \in N^*}$ составляет цепь с полными связями, имеющую множество состояний X, начальное распределение p и переходные отображения $(T^{(n)}_x)_{x \in X}$, $n \in N^*$.

Замечание. Если допускать существование вероятностной меры Q, так что

$$Q(\xi_1(\omega) \in A) = p(A)$$

и

$$Q(\xi_{n+1}(\omega) \in A | \xi_j, 1 \leqslant j \leqslant n)_{\substack{\xi_j(\omega) = x_j \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = T_{x_1 \ldots x_n} p(A)$$

для всякого $A \in F$, $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$ и $n \in N^*$, то $Q = P$.

2. Пусть $B(\mathfrak{M})$ — банахово пространство всех действительных ограниченных и M-измеримых функций, определенных на $\mathfrak{M}$, с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{p \in \mathfrak{M}} |\varphi(p)|.$$

Обозначим через $B_L(\mathfrak{M})$ то подмножество $B(\mathfrak{M})$, состоящее из функций φ, для которых

$$|\varphi(T_x^{(n)}p') - \varphi(T_x^{(n)}p'')| \leqslant l_n$$

при всяком $x^{(n)} \in X^{(n)}$, p', $p'' \in \mathfrak{M}$, $n \in N^*$, где $L = (l_n)_{n\in N^*}$ — произвольная числовая последовательность.

На $B(\mathfrak{M})$ определяем оператор

$$U\varphi(p) = \int\limits_X p(dx)\,\varphi(T_x p);$$

естественно, U — линейный оператор нормы 1, отображающий $\mathfrak{M}$ в себя.

Для каждого $l \in N^*$ пусть $p_{1,l}$ — функция, определенная на $\mathfrak{M} \times F^{(l)}$ посредством соотношений

$$p_{1,l}(p, A) = p(A),$$

если $l = 1$,

$$p_{1,l}(p, A^{(l)}) = \int\limits_X p(dx_1) \int\limits_X \ldots \int\limits_X T_{x_1 \ldots x_{l-1}}(dx_l)\chi_{A^{(l)}}(x_1, \ldots, x_l),$$

если $l > 1$;
очевидно $p_{1,l}(p;\cdot)$ — вероятностная мера на F для всякого $p \in \mathfrak{M}$ и

$$p_{1,l}(p, A^{(l)}) = P(\xi_1(\omega) \in A_1, \ldots, \xi_l(\omega) \in A_l),$$

если $A^{(l)} = A_1 \ldots A_l$.

Введем также для каждого l, $n \in N^*$ функцию $p_{1,l}^{(n)}$, определенную на $\mathfrak{M} \times F^{(l)}$ соотношениями

$$p_{1,l}^{(n)} = p_{1,l},$$

если $n = 1$.

$$p_{1,l}^{(n)}(p;\ A^{(l)}) = \int\limits_X p(dx)\, p_{1,l}^{(n-1)}(T_x p;\ A^{(l)}),$$

если $n > 1$;
очевидно $p_{1,l}^{(n)}(p,\cdot)$—вероятностная мера на $F^{(l)}$ для всякого $p \in \mathfrak{M}$ и

$$p_{1,l}^{(n)}(p;\ A^{(l)}) = P(\xi_n(\omega) \in A_1, \ldots, \xi_{n+l-1}(\omega) \in A_l),$$

если $A^{(l)} = A_1 \times \ldots \times A_l$. Подставляя $A^{(l)}$ для $X^{(0)} \times A^{(l)}$, получаем для всякого l, $n \in N^*$, $p \in \mathfrak{M}$ и $A^{(l)} \in F^{(l)}$

$$p_{1,l}^{(n)}(p;\ A^{(l)}) = p_{1,l+n-1}(p;\ X^{(n-1)} \times A^{(l)}).$$

Далее, рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_1 = \underset{x\in X}{U} T_x\mathfrak{M},$$

где

$$T_x\mathfrak{M} = \{T_x p | p \in \mathfrak{M}\},$$

очевидно $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$.

Будем говорить, что однородная цепь с полными связями $(\xi_n)_{n\in N^*}$ удовлетворяет условию (M_1), если имеется $\delta > 0$ и бесконечное множество

$J_1 \subseteq N^*$, так что для всякого разбиения $(A_i^{(m)})_{i=1,2}$ $X^{(m)}$, состоящего из подмножеств $F^{(m)}$, имеем

$$p_{1,m}(p;\ A_1^{(m)}) > \delta$$

или

$$p_{1,m}(p;\ A_2^{(m)}) > \delta$$

при любом $p \in \mathfrak{M}_1$, где $m \in J_1$.

Теорема 2 (эргодическая теорема). *Если переходные отображения $(T_x)_{x \in X}$ удовлетворяют условию*

$$|T_{x^{(n)}}p'(A) - T_{x^{(n)}}p''(A)| \leqslant a_n \tag{1}$$

для всякого $x^{(n)} \in X^{(n)}$, p', $p'' \in \mathfrak{M}$ и $A \in F$, где $\sum\limits_{n \in N^*} a_n$ — сходящийся числовой ряд, то достаточное условие для существования постоянной функции $U^\infty\varphi$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \| U^n\varphi - U^\infty\varphi \| = 0$$

при всяком $\varphi \in B_L(\mathfrak{M})$ с $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = 0$, состоит в том, что рассматриваемая цепь с полными связями удовлетворяет условию (M_1).

Доказательство. Оценим разность $U^n\varphi(p') - U^n\varphi(p'')$ с p', $p'' \in \mathfrak{M}_1$. Ввиду этого заметим сначала, что для всякого $n \in N^*$, $m \in N$ и $\varphi \in B(\mathfrak{M})$, $p \in \mathfrak{M}$ имеем

$$U^{m+n}\varphi(p) = \int\limits_{X^{(n)}} p_{1,n}(p;\ dx^{(n)})\, U^m\varphi(T_{x^{(n)}}p). \tag{2}$$

Используя вышеуказанное соотношение, оцениваемую разность можно переписать:

$$U^n\varphi(p') - U^n\varphi(p'') = \int\limits_{X^{(m)}} [p_{1,m}(p',\ dx^{(m)}) - p_{1,m}(p'';\ dx^{(m)})U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p') +$$

$$+ \int\limits_{X^{(m)}} p_{1,m}(p'';\ dx^{(m)})\,[U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p') - U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p'')] \tag{3}$$

для $m < n$, $m \in J_1$.

С целью получения мажоранты для первого интеграла поступаем следующим образом. Пусть

$$q_m(p',\ p'';\ A^{(m)}) = p_{1,m}(p';\ A^{(m)}) - p_{1,m}(p'';\ A^{(m)}),$$

где $A^{(m)} \in F^{(m)}$. Для всякого $m \in J_1$ существуют два подмножества $P^{(m)}$, $Q^{(m} \in F^{(m)}$, определяющие разбиение $X^{(m)}$, так что

$$q_m(p',\ p'';\ A^{(m)}) \geqslant 0,\ A^{(m)} \subset P^{(m)},$$

$$q_m(p',\ p'';\ A^{(m)}) < 0,\ A^{(m)} \subset Q^{(m)};$$

в таком случае имеем

$$q_m(p',\ p'';\ P^{(m)}) = |q_m(p',\ p'',\ Q^{(m)})|.$$

Обозначая это общее значение через $\theta_m(p', p'')$, выводим из условия (M_1):

$$0 \leqslant \theta_m(p', p'') \leqslant 1 - \delta = \eta < 1;$$

с помощью этих обозначений и при $\theta_m(p', p'') \neq 0$ первый интеграл можно переписать в виде

$$\theta_m(p', p'')\left\{ \int\limits_{P(m)} \frac{1}{Q_m(p', p'')} q_m(p', p''; dx^{(m)}) U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p') -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{Q^{(m)}} \frac{1}{\theta_m(p', p'')} \left| q_m(p', p''; dx^{(m)}) \right| U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p')\right\},$$

и он, поэтому, мажорируется $\eta(\overline{\varphi}^{n-m} - \varphi^{n-m})$, где

$$\overline{\varphi}^k = \sup_{p\in\mathfrak{M}_1} U^k\varphi(p), \ \ \varphi^k = \inf_{p\in\mathfrak{M}_1} U^k\varphi(p), \qquad k\in N.$$

Если $\theta_m(p', p'') = 0$, мажорирование выполняется тривиально.

Перейдем теперь к оценке второго интеграла из (3). Заметим сперва, что в силу условия (1) мы имеем для всякого $l\in N^*$

$$|p_{1,l}(T_{x^{(n)}}p'; A^{(l)}), - p_{1,l}(T_{x^{(n)}}p''; A^{(l)})| \leqslant \sum_{j=n}^{n+l-1} a_j$$

при всяком $x^{(n)}\in X^{(n)}$; $n\in N^*$; $p', p''\in\mathfrak{M}$ и $A^{(l)}\in F^{(l)}$.

Используя соотношение (2), можем записать

$$U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p') - U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p'') =$$

$$= \int\limits_{X^{(n-m)}} [p_{1,n-m}(T_{x^{(m)}}p'; dy^{(n-m)}) - p_{1,n-m}(T_{x^{(m)}}p''; dy^{(n-m)})]\varphi(T_{y^{(n-m)}}\cdot T_{x^{(m)}}p') +$$

$$+ \int\limits_{X^{(n-m)}} p_{1,n-m}(T_{x^{(m)}}p''; dy^{(n-m)})[\varphi(T_{y^{(n-m)}}\cdot T_{x^{(m)}}p') - \varphi(T_{y^{(m-n)}}\cdot T_{x^{(m)}}p'');$$

следовательно,

$$|U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p') - U^{n-m}\varphi(T_{x^{(m)}}p'')| \leqslant 2\,\|\varphi\| \sum_{j=m}^{n-1} a_j + l_n;$$

эта оценка остается правильной в $\mathfrak{M}$.

Имея в виду вышеуказанную оценку, из соотношения (3) получаем $(m\in J_1)$

$$\overline{\varphi}^n - \varphi^n \leqslant \eta(\overline{\varphi}^{n-m} - \varphi^{n-m}) + 2\,\|\varphi\| \sum_{j=m}^{n-1} a_j + l_n.$$

Так как последовательность $(\varphi^n)_{n\in N^*}$ неубывающая, а последовательность $(\overline{\varphi}^n)_{n\in N^*}$ невозрастающая, заключаем обычным путем о существовании постоянной функции $U^\infty\varphi$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in\mathfrak{M}_1} |U^n\varphi - U^\infty\varphi| = 0.$$

Из последнего соотношения и из соотношения

$$U^n\varphi(p) = \int_X p(dx)\, U^{n-1}\varphi(T_x p), \qquad p\in\mathfrak{M},$$

получаем легко, что

$$\lim_{n\to\infty} \| U^n\varphi - U^\infty\varphi \| = 0.$$

Замечания 1. Пусть $\mathfrak{M}_n = \bigcup_{x\in X} T_x \mathfrak{M}_{n-1}$; $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$; можно показать более обще, что для правильности теоремы 2 достаточно существования такого $n_0 \in N^*$, для которого удовлетворяется условие (M_{n_0}), соответствующее (M_1). Пример, когда это условие имеет место, состоит в существовании некоторого $p_0 \in \mathfrak{M}$ и постоянного $\alpha > 0$, таких, что

$$T_{x^{(n_0)}} p \geqslant \alpha p_0 \tag{4}$$

для всякого $x^{(n_0)} \in X^{(n_0)}$ и $p\in\mathfrak{M}$; в частности, для случая теоремы 2 достаточно подставить в (4) $n_0 = 1$.

Замечание 2. Эта теорема является в некотором отношении аналогом теоремы, данной для цепей с полными связями в широком смысле в [1], гл. V, § 6.

Теорема 2 имеет такое следствие.

Следствие. Для всякого $l \in N^*$ существует вероятностная мера $p_{1,l}^\infty$ на $F^{(l)}$, так что для всякого $p\in\mathfrak{M}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,l}^{(n)}(p;\ A^{(l)}) = p_{1,l}^\infty(A^{(l)}).$$

Замечание 3. Вышеуказанное следствие содержит эргодическую теорему, доказанную в [3] (см. также [1], гл. 11, § 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Ciucu, R. Theodorescu, Procese cu legături complete, Ed. Acad. R. P. R., Bucuresti, 1960.

2. M. Iosifescu, R. Theodorescu, Lanturi cu legături complete, I—II, Comunicări le Acad. R. P. R., 11, 12, 1961, 1451—1453; 12, 3, 1962, 295—297.

3. D. Onicescu, G. Mihos, Sur les chaînes de variables statistiques, Bull. Sci Math., 59, 1935, 174—192.

Поступила 3.V 1963 г.

Румыния