Чебышевские приближения и проблема моментов

В. Д. Коромысличенко

1. Задаче чебышевского приближения со связями посвящено много работ (например, [1, 4 — 12] и др.).

В настоящей работе результаты работ [4, 5, 6, 11, 12] обобщаются на следующую задачу. Пусть на бикомпактном хаусдорфовом пространстве G определены $n+1$ линейно независимых непрерывных действительных функций $\{\varphi_j(x)\}_0^n$. На классе полиномов $F(a;\ x) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)$, коэффициенты которых удовлетворяют линейно независимым связям

$$\omega_i[F] = \sum_{j=0}^{n} a_j\alpha_j^{(i)} = \alpha_i, \qquad i = \overline{1,\ p}\ (1 \leqslant p \leqslant n), \qquad \sum |\alpha_i| > 0, \tag{1}$$

задано p функционалов, каждый своими $n+1$ моментами

$$\alpha_j^{(i)} = \int_G \varphi_j(x)\, d\sigma_i, \qquad j = \overline{0,\ n}, \qquad i = \overline{1,\ p}, \tag{2}$$

где σ_i $(i = \overline{1,\ p})$ — определенные функционалами неизвестные обобщенные аддитивные меры.

Умножая (2) на числа μ_i $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i\mu_i = 1\right)$, получаем $n+1$ обобщенных моментов

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_j^{(i)}\mu_i = \int_G \varphi_j(x)(\mu_1 d\sigma_1 + \ldots + \mu_p d\sigma_p), \qquad j = \overline{0,\ n}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\alpha_i = \omega_i[F] \equiv \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(i)} a_j \equiv \int_G F(a;\ x)\, d\sigma_i, \tag{2'}$$

$$1 = \Omega[F] \equiv \sum_{j=0}^{n} \gamma_j a_j \equiv \int_G F(a;\ x)\, d\sigma \qquad \left(d\sigma = \sum_{i=1}^{p} \mu_i d\sigma_i\right). \tag{3'}$$

Требуется найти числа $\mu_i \left(\sum\limits_{i=0}^{p} \mu_i\alpha_i = 1\right)$ и меры σ_i, $\quad i = \overline{1,\ p}$, чтобы

$$\int_G |d\sigma| = \min. \tag{4}$$

Пусть $F(a^*;\ x)$ наименее уклоняется от нуля при связях (1), то есть $F(a^*;\ x)$ — решение обобщенной задачи В. А. Маркова. Считая, что в (1) определитель $|\alpha_j^{(i)}|_{\substack{i=\overline{1,\,p}\\ j=\overline{n+1-p,\,n}}} \neq 0$, после исключения зависимых параметров для некоторой неприводимой чебышевской подсистемы [3] r $(r \leqslant n+2-p)$ точек уклонения будем иметь тождество

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} \lambda_s \widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s) \equiv 0,\quad \lambda_s \neq 0,\quad \operatorname{sgn}\lambda_s \cdot \operatorname{sgn} F(a^*;\ x_s) = \text{const},\quad s=\overline{p,\,p+r-1} \tag{5}$$

где [11]

$$\widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s) = \sum_{j=1}^{n+1-p} A_{j-1}\widetilde{\varphi}(x_s),\qquad \underset{(j=\overline{1,\,n+1-p})}{\widetilde{\varphi}_j(x) = \varphi_{j-1}(x)} - d_1\varphi_{n+1-p}(x) - \ldots - d_p\varphi_n(x). \tag{6}$$

Заметим, что в (5) любые $r-1$ форм $\widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s)$ линейно независимы, то есть любые $r-1$ векторов $\vec{\varphi}^*(x_s) = (\widetilde{\varphi}_1(x_s),\ \ldots,\ \widetilde{\varphi}_{n+1-p}(x_s))$ линейно независимы. Отсюда следует лемма.

Лемма 1. *Любые $r-1$ векторов $\vec{\varphi}(x_s) = (\varphi_0(x_s), \ldots, \varphi_n(x_s))$ (x_s — точки тождества (5)) линейно независимы.*

Теорема 1. *Векторы $\vec{\varphi}(x_s) = (\varphi_0(x_s),\ \ldots,\ \varphi_n(x_s))$ (x_s — точки тождества (5)) линейно независимы.*

Доказательство. Допустим, что векторы $\vec{\varphi}(x_s)$ линейно зависимы:

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} t_s\vec{\varphi}(x_s) = 0. \tag{6}$$

На основе леммы 1 в (6) $t_s \neq 0$. Из (6) следует

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} t_s F(A;\ x_s) = 0, \tag{7}$$

где параметры полинома $F(A;\ x)$ удовлетворяют однородным связям $\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^{(i)}A_j = 0$, для которых $F(A;\ x) = \widetilde{F}(\widetilde{A};\ x)$ [11], то есть имеем

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} t_s\widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s) \equiv 0. \tag{8}$$

Сравнивая (8) и (5), находим $\lambda_s{:}\lambda_p = t_s{:}t_p$. Из (6) следует тогда

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} t_s F(a^*;\ x_s) \equiv 0,\qquad \sum_{s=p}^{p+r-1}\lambda_s F(a^*;\ x_s) \equiv 0,\qquad \lambda_s > 0, \tag{9}$$

что невозможно.

На основе теоремы 1 возьмем произвольный набор $n+1$ точек из G, таких, что векторы $\vec{\varphi}(x_s)$, $s=\overline{1,\,n+1}$ линейно независимы. Из систем уравнений

$$\alpha_j^{(i)}=\sum_{s=1}^{n+1}K_s^{(i)}\varphi_j(x_s),\qquad j=\overline{0,\,n}\qquad (i=\overline{1,\,p}),\tag{10}$$

получаем тождества

$$\sum_{s=1}^{n+1}K_s^{(i)}F(a;\ x_s)\equiv\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^{(i)}a_j,\qquad \sum_{s=1}^{n+1}K_s^{(i)}\widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s)\equiv 0,\qquad i=\overline{1,\,p}.\tag{11}$$

Линейно независимых из числа $n+1$ форм $\widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s)$ будет $n+1-p$, в качестве которых можем считать формы $\widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s)$, $\quad s=\overline{p+1,\ n+1}$. Тогда определитель $|K_s^{(i)}|_{\substack{i=\overline{1,\,p}\\ s=\overline{1,\,p}}}\neq 0$ (ср. [11]).

Из совместной системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_iK_s^{(i)}=0,\qquad s=\overline{1,\ p-1},\qquad \sum|\mu_i|>0,\tag{12}$$

находим числа μ_i, $i=\overline{1,\,p}$. Возьмем то решение μ_i, $i=\overline{1,\,p}$, системы уравнений (12), для которого $\sum\limits_{i=1}^{p}\alpha_i\mu_i=1$.

В тождестве (5) можем считать $\lambda_p=\sum\limits_{i=1}^{p}\mu_iK_p^{(i)}$. Остальные числа λ_s будут равны $\lambda_s=\sum\limits_{i=1}^{p}\mu_iK_s^{(i)}$, $s=\overline{p+1,\ p+r-1}$, $\lambda_{p+r}=\ldots=\lambda_{n+1}=0$. Для чисел μ_i имеем

$$1=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\mu_i\alpha_j^{(i)}\right)a_j\equiv\sum_{s=p}^{p+r-1}\lambda_sF(a;\ x_s).\tag{13}$$

Оценим снизу $\int\limits_G|d\sigma|$. Если в (3′) $F(a^*;\ x)$ — решение задачи В. А. Маркова, то будем иметь

$$1=\left|\int\limits_G F(a^*;\ x)\,d\sigma\right|\leqslant\varrho\int\limits_G|d\sigma|,\tag{14}$$

$$\int\limits_G|d\sigma|\geqslant\frac{1}{\varrho}.\tag{14′}$$

Равенство в (14′) не достигается, если хотя бы одна из точек роста полной вариации $\int\limits_G|d\sigma|$ лежит вне точек уклонения полинома $F(a^*;\ x)$. Действительно, пусть существует такая точка $x_0\in G$, что $F(a^*;\ x_0)<L<$ $<\varrho$. При обозначении $u(x_0)=\{x\in G,\ |F(a^*;\ x)|\leqslant L<\varrho\}$ имеем

$$1=\left|\int\limits_G F(a^*;\ x)\,d\sigma\right|=\left|\int\limits_{G-u}F(a^*;\ x)\,d\sigma+\int\limits_u F(a^*;\ x)\,d\sigma\right|\leqq$$

$$\leqq \varrho \int_{G-u} |d\sigma| + L\int_{u} |d\sigma| < \varrho \int_{G} |d\sigma|, \tag{15}$$

то есть

$$\int_{G} |d\sigma| > \frac{1}{\varrho}. \tag{15'}$$

Построим меру σ^* с точками роста ее полной вариации, совпадающими с точками неприводимой чебышевской подсистемы точек уклонения $\{x_s\}_p^{p+r-1}$ с «массой» в точках x_s, равной

$$d\sigma^{*(s)} = \lambda_s = \sum_{i=1}^{p} \mu_i K_s^{(i)}, \qquad s = \overline{p,\ p+r-1} \quad (\lambda_1 = \ldots = \\ = \lambda_{p-1} = 0)\,(\lambda_{p+r} = \ldots = \lambda_{n+1} = 0). \tag{16}$$

Для построенной таким образом меры σ^* имеем*

$$\int_{G} |d\sigma^*| = \frac{1}{\varrho}. \tag{17}$$

Меры σ_i^*, $i = \overline{1, p}$, определим как аддитивные функции ограниченной вариации с точками роста полной вариации $x_1, \ldots, x_{n+1}$, где $x_p, \ldots, x_{p+r-1}$ — неприводимая чебышевская подсистема точек уклонения, а $x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+r}, \ldots, x_{n+1}$ — произвольные добавленные точки, такие, что векторы $\vec{\varphi}(x_s) = (\varphi_0(x_s), \ldots, \varphi_n(x_s))$ $(s = \overline{1,\ n+1})$ линейно независимы, с «массой» в точках x_s, равной $d\sigma_i^{*(s)} = K_s^{(i)}$.

Если решением задачи В. А. Маркова будет $F(a^*;\ x) \equiv \frac{1}{\gamma_0}$ (для определенности считаем $\gamma_0 > 0$), то в (17) мера σ^* неотрицательна, и неприводимой чебышевской подсистеме точек уклонения соответствует распределение положительных «масс» в точках x_s.

2. Будем рассматривать полиномы $F(a;\ x)$, составленные из функций $\{\varphi_j(x)\}_0^n$, образующих T-систему на $G \equiv [a,\ b]$. Рассмотрим последовательность $(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)\left(\gamma_j = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \alpha_j^{(i)}, \qquad j = \overline{0,\ n}\right)$.

Последовательность $(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)\left(\gamma_j = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \alpha_j^{(i)}, \qquad j = \overline{0,\ n}\right)$ называется строго позитивной [2, 4], если для любого полинома $F(a;\ x) \geqslant 0$ $(\not\equiv 0)$ имеем $\Omega[F] = \sum_{j=0}^{n} a_j \gamma_j > 0$.

Последовательность $(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ называется сингулярно позитивной [2, 4], если существует полином $F(a;\ x) \geqslant 0$ $(\not\equiv 0)$, для которого имеем $\Omega\ [F] = \sum_{j=0}^{n} a_j \gamma_j = 0$.

Для полиномов из функций $\{\varphi_j(x)\}_0^n$, образующих T-систему на $G \equiv [a, b]$ и связи $\sum_{j=0}^{n} \gamma_j a_j = 1\left(\gamma_j = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \alpha_j^{(i)}\right)$, полученной из (1), справедливы следующие теоремы**.

---

* Для случая, когда в (1) имеем одну связь, широкий аналог полученного результата содержится в работах [2, 8].

** Доказываются теоремы 2, 3 аналогично тому, как и в работе [4].

Теорема 2. *Для того, чтобы задача В. А. Маркова имела единственным решением вырожденное* $F(a;\ x) \equiv \frac{1}{\gamma_0}$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *была строго позитивной.*

Теорема 3. *Для того, чтобы задача В. А. Маркова имела одним из решений* $F(a;\ x) \equiv \frac{1}{\gamma_0}$, *но не единственным, необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $(\gamma_0, \ldots, \dot{\gamma}_n)$ *была сингулярно позитивной.*

3. Из теоремы 1 следует, что при $f(x) \equiv 0$ критерии экстремальности для полиномов наилучшего приближения в задаче В. А. Маркова совпадают по форме с теми, которые установлены для полиномов T-систем функций в работах [11, 12].

Для полиномов $F(a;\ x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, где функции $\{\varphi_j(x)\}_0^n$ линейно независимы и непрерывны на бикомпакте G, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для того, чтобы полином* $F(a;\ x)$ *при связях* (1) *был наименее уклоняющимся от непрерывной функции* $f(x)$ *на бикомпакте* G, *необходимо и достаточно, чтобы для некоторого набора* r $(r \leqslant n + 2 - p)$ *точек уклонения было выполнено одно из двух условий:*

1) *либо при линейной независимости векторов* $\vec{\varphi}(x_s) = (\varphi_0(x_s, \ldots, \varphi_n(x_s))$, $s = \overline{1, r}$, *выполнены условия одной из теорем такого вида, какие установлены в работах* [11, 12] *для* T-*систем, например, для какого-либо определителя*

$$\begin{vmatrix} \varphi_{j_1}(x_1) & \ldots & \varphi_{j}(x_r) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{j_r}(x_1) & \ldots & \varphi_{j_r}(x_r) \end{vmatrix} \neq 0$$

должны выполняться условия

а) *ранг матрицы* $\| \omega_1[f_\nu] \ldots \omega_p[f_\nu] \|_{\nu=\overline{0,n},\ \nu \neq j_1, \ldots, j_r}$ *системы уравнений* $\sum_{i=1}^{p} \mu_i \omega_i [f_\nu] = 0, \quad \nu = \overline{0, n},\ \nu \neq j_1, \ldots, j_r,\ \sum |\mu_i| > 0$, *равен* $p - 1$, *где обозначено*

$$\omega_i[f_\nu] = \begin{vmatrix} \varphi_{j_1}(x_1) & \ldots & \varphi_{j_1}(x_r) \alpha_{j_1}^{(i)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{j_r}(x_1) & \ldots & \varphi_{j_r}(x_r) \alpha_{j_r}^{(i)} \\ \varphi_\nu(x_1) & \ldots & \varphi_\nu(x_r) \alpha_\nu^{(i)} \end{vmatrix},$$

б) *все числа* $\left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \omega_i [\Delta_s^*] \right) (F(a^*;\ x_s) - f(x_s)), \quad s = \overline{1, r}$, *отличны от нуля и одного знака, где обозначено*

$$\omega_i[\Delta_s^*] = \begin{vmatrix} \varphi_{j_1}(x_1) & \ldots & \varphi_{j_1}(x_{s-1}) \alpha_{j_1}^{(i)} \varphi_{j_1}(x_{s+1}) \ldots \varphi_{j_1}(x_r) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{j_r}(x_1) & \ldots & \varphi_{j_r}(x_{s-1}) \alpha_{j_r}^{(i)} \varphi_{j_r}(x_{s+1}) \ldots \varphi_{j_r}(x_r) \end{vmatrix};$$

2) *либо при линейной зависимости в узком смысле векторов* $\vec{\varphi}(x_s)$:

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \vec{\varphi}(x_s) = 0, \qquad c_s \neq 0, \qquad s = \overline{1, r}, \tag{18}$$

имеем

$$\operatorname{sgn} c_s \cdot \operatorname{sgn} [F(a^*;\ x_s) - f(x_s)] = \text{const}, \qquad s = \overline{1, r}. \tag{19}$$

Случай 1) доказывается аналогично тому, как и в работе [12].

Необходимость 2). Если векторы $\vec{\varphi}(x_s)$, соответствующие неприводимому тождеству (5), линейно зависимы в узком смысле $\sum_{s=1}^{r} c_s \vec{\varphi}(x_s) = 0$, то числа c_s отличаются от чисел λ_s из (5) на общий множитель.

Достаточность 2). Из (18) следует $\sum_{s=1}^{r} c_s \widetilde{F}(\widetilde{A};\ x_s) \equiv 0$, что при учете (19) означает, что $F(a^*;\ x)$ — решение задачи В. А. Маркова.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марков, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПб, 1892.
2. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ, Харьков, 1938.
3. Е. Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Изд-во АН УССР, Киев, 1957.
4. Е. Я. Ремез, Укр. матем. журн., т. XIII, №3, 1957.
5. Е. Я. Ремез и В. Д. Коромысличенко, ДАН, т. 135, № 4, 1960.
6. Д. Г. Гребенюк, Полиномы наилучшего приближения, Изд-во АН УзССР, 1960.
7. Б. А. Рымаренко, О некоторых вопросах теории приближения функций посредством полиномов, Л., 1951.
8. С. Я. Хавинсон, Экстремальные задачи для полиномов и моментов, Изв. АН СССР, сер. матем. 25, № 4, 1961.
9. В. Н. Буров, ДАН, т. 138, № 3, 1961.
10. Е. Я. Гольштейн, ДАН, т. 140, № 1, 1961.
11. В. Д. Коромысличенко, Укр. матем. журн., т. XIII, № 3, 1961.
12. В. Д. Коромысличенко, Укр. матем. журн., т. XIV, № 2, 1962.

Поступила 29.IV 1962 г.
Киев