О некоторых характеристических подгруппах конечной группы

С. П. Азлецкий

Введение. При исследовании строения групп, при выявлении тех или иных классов групп и изучении их свойств большую роль, как известно, играют характеристические подгруппы. Особенно полезными в развитии теории групп оказались, например, центр, коммутант, ядро группы, а также подгруппа Фраттини и подгруппа Фиттинга.

В настоящей статье рассматриваются следующие характеристические подгруппы конечной группы $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{Z}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ — подгруппа, порожденная центрами всех силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ — подгруппа, порожденная ядрами всех силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{K}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ — подгруппа, порожденная коммутантами всех силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Исследуются свойства этих подгрупп, а также свойства группы, $\mathfrak{Z}^0$-подгруппа, $\mathfrak{S}^0$-подгруппа или $\mathfrak{K}^0$-подгруппа которой удовлетворяют тем или иным условиям. В частности, рассматриваются случаи совпадения $\mathfrak{Z}^0$-подгруппы с центром группы, $\mathfrak{S}^0$-подгруппы с ядром группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}^0$-подгруппы с коммутантом группы $\mathfrak{G}$ и некоторые случаи совпадения этих подгрупп между собой. Приводятся также необходимые и достаточные признаки специальности группы, выявляющие характеристические свойства специальных групп.

§ 1. Пусть $\mathfrak{G}$—группа порядка $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, и пусть $\mathfrak{P}_i^{(j)}$ — некоторая силовская подгруппа порядка $p_i^{\alpha_i}$ группы $\mathfrak{G}$, $j=1, 2, \ldots, t_i$, $i=1, 2, \ldots, k$. Пусть $\mathfrak{Z}_i^{(j)}=\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_i^{(j)})$ — центр подгруппы $\mathfrak{P}_i^{(j)}$, $\mathfrak{S}_i^{(j)}=\mathfrak{S}(\mathfrak{P}_i^{(j)})$ — ядро подгруппы $\mathfrak{P}_i^{(j)}$, т. е. множество всех тех элементов группы $\mathfrak{P}_i^{(j)}$, которые перестановочны со всеми подгруппами группы $\mathfrak{P}_i^{(j)}$, и пусть $\mathfrak{K}_i^{(j)}=\mathfrak{K}(\mathfrak{P}_i^{(j)})$ — коммутант подгруппы $\mathfrak{P}_i^{(j)}$. Обозначим через $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G})$ подгруппу, порожденную всеми подгруппами $\mathfrak{Z}_i^{(j)}$ (при $j=1, 2, \ldots, t_i$ и $i=1, 2, \ldots, k$), и назовем ее $\mathfrak{Z}^0$-подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{G})$ подгруппу, порожденную всеми $\mathfrak{S}_i^{(j)}$ (при тех же значениях j и i), и назовем ее $\mathfrak{S}^0$-подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Наконец, обозначим через $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$ подгруппу, порожденную всеми $\mathfrak{K}_i^{(j)}$ (при тех же j и i), и назовем ее $\mathfrak{K}^0$-подгруппой группы $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{Z}^0$-подгруппу, $\mathfrak{S}^0$-подгруппу и $\mathfrak{K}^0$-подгруппу группы $\mathfrak{G}$ будем называть еще $\mathfrak{H}^0$-подгруппой группы $\mathfrak{G}$ и обозначать через $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G})$. При этом будем называть $\mathfrak{H}$-подгруппой группы $\mathfrak{G}$, обозначим ее через $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$, следующие подгруппы:

а) центр группы $\mathfrak{G}$, если $\mathfrak{H}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является ее $\mathfrak{Z}^0$-подгруппой;

в) ядро группы $\mathfrak{G}$, если $\mathfrak{H}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является ее $\mathfrak{S}^0$-подгруппой и

с) коммутант группы $\mathfrak{G}$, если $\mathfrak{H}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является ее $\mathfrak{K}^0$-подгр уппой.

Составим теперь следующий ряд подгрупп группы $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{H}^{01} \supset \mathfrak{H}^{02} \supset \mathfrak{H}^{03} \supset \ldots \supset \mathfrak{H}^{0t}, \tag{I}$$

где $\mathfrak{H}^{01} = \mathfrak{H}^0(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{H}^{02} = \mathfrak{H}^0(\mathfrak{H}^{01})$, ..., $\mathfrak{H}^{0i} = \mathfrak{H}^0(\mathfrak{H}^{0i-1})$, при этом $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}^{00}$. Будем называть данный ряд (I) $\mathfrak{H}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$. Он будет называться соответственно $\mathfrak{Z}^0$-рядом, $\mathfrak{S}^0$-рядом или $\mathfrak{K}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$ в зависимости от того, будет ли $\mathfrak{H}^0$-подгруппа $\mathfrak{Z}^0$-подгруппой, $\mathfrak{S}^0$-подгруппой или $\mathfrak{K}^0$-подгруппой группы $\mathfrak{G}$.

Отметим прежде всего следующие простейшие свойства $\mathfrak{H}^0$-подгрупп группы $\mathfrak{G}$ и ряда (I), которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

1. $\mathfrak{H}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ — характеристическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

2. Если $\mathfrak{H}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является ее $\mathfrak{Z}^0$-подгруппой или $\mathfrak{S}^0$-подгруппой, то порядок $\mathfrak{H}^0$-подгруппы делится на все простые делители порядка группы $\mathfrak{G}$, причем если $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{G}$, то $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G})$ не может быть подгруппой Холл'а (т. е. подгруппой, порядок и индекс которой взаимно просты).

3. Если $\mathfrak{H}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ является ее $\mathfrak{Z}^0$-подгруппой или $\mathfrak{S}^0$-подгруппой, то ряд (I) стабилизируется на некотором, отличном от единицы, члене, т. е. при некотором натуральном t $\mathfrak{H}^{0t+1} = \mathfrak{H}^{0t} \neq E$, где E — единица группы.

4. Если порядок $\mathfrak{K}^0$-подгруппы группы $\mathfrak{G}$ не делится на простой делитель p_i порядка группы $\mathfrak{G}$, то силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$ по этому числу p_i — абелева группа.

5. Для того чтобы $\mathfrak{K}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ была единичной, необходимо и достаточно, чтобы все силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$ были абелевы группы.

6. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{S}^0(\mathfrak{G})$; $\mathfrak{S}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{S}^0(\mathfrak{G})$; $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{G})$.

Рассмотрим некоторые леммы.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) = E$, то $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) = E$. Тогда согласно свойству 5 все силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$ должны быть абелевы, а потому все они будут содержаться в $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G})$, т. е $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. Заметим однако, что из условия $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$ не следует, что $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) = E$. Это видно на примере простой группы, в которой по крайней мере одна силовская подгруппа неабелева.

Лемма 2. *Если ряд (I) является $\mathfrak{Z}^0$-рядом или $\mathfrak{S}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$, то силовский класс $<\mathfrak{P}_i>$ всякой абелевой силовской подгруппы $\mathfrak{P}_i$ группы $\mathfrak{G}$ содержится во всех членах ряда* (I). *Если ряд* (I) *является $\mathfrak{S}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}$ имеет гамильтонову силовскую подгруппу $\mathfrak{P}_i$, то силовский класс $<\mathfrak{P}_i>$ содержится во всех членах ряда (I).*

Доказательство. 1. Пусть ряд (I) — $\mathfrak{S}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{P}_i$ — абелева или гамильтонова силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Тогда ядро $\mathfrak{S}(\mathfrak{P}_i)$ этой подгруппы $\mathfrak{P}_i$ совпадает с ней, а потому в силу инвариантности $\mathfrak{S}^{01}$ в $\mathfrak{G}$ силовский класс $<\mathfrak{P}_i>$ (т. е. множество всех силовских подгрупп данного порядка группы $\mathfrak{G}$, см. [1]), должен содержаться в $\mathfrak{S}^{01}$. Но $\mathfrak{P}_i$ является абелевой (или соответственно гамильтоновой) силовской подгруппой и в $\mathfrak{S}^{01}$, а потому $<\mathfrak{P}_i> \subset \mathfrak{S}^0(\mathfrak{S}^{01}) = \mathfrak{S}^{02}$. Отсюда по индукции приходим к заключению, что класс $<\mathfrak{P}_i>$ содержится во всех членах $\mathfrak{S}^0$-ряда группы $\mathfrak{G}$.

2. Аналогично лемма доказывается и для случая, когда ряд (I) является $\mathfrak{Z}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$.

Лемма 3. *Если ряд (I), являясь $\mathfrak{Z}^0$-рядом или $\mathfrak{S}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$, стабилизируется на специальной группе, то всякая абелева силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{S}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$ стабилизируется на специальной группе и $\mathfrak{G}$ имеет гамильтонову силовскую подгруппу, то эта силовская подгруппа инвариантна в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathfrak{S}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$ стабилизируется на некоторой специальной группе $\mathfrak{S}^{0t}$, а $\mathfrak{P}_i$ — абелева или гамильтонова силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Тогда согласно лемме 2 $\mathfrak{P}_i \subset \mathfrak{S}^{0t}$ и $\mathfrak{P}_i$ является силовской подгруппой группы $\mathfrak{S}^{0t}$, а потому, в силу специальности $\mathfrak{S}^{0t}$, $\mathfrak{P}_i$ инвариантна в $\mathfrak{S}^{0t}$, а следовательно, и в $\mathfrak{G}$.

2. В случае $\mathfrak{Z}^0$-ряда доказательство аналогично.

Отметим теперь, что на основании леммы 3 справедлива следующая теорема, для формулировки которой воспользуемся понятием П-специальной группы [2], представляющим развитие понятия p-специальной группы С. А. Чунихина [3].

Теорема 1. *Если $\mathfrak{H}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$, являясь ее $\mathfrak{Z}^0$-рядом или $\mathfrak{S}^0$-рядом, стабилизируется на специальной группе, то $\mathfrak{G}$ — П-специальная группа, где П—множество всех тех простых делителей порядка группы $\mathfrak{G}$, по которым силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$ абелевы. При этом в случае $\mathfrak{S}^0$-ряда множество П будет сод ржать число 2, если силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$ по этому числу является абелевой или гамильтоновой группой.*

Используем теорему 1 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$ стабилизируется на специальной группе.* Тогда

1. *Если этот ряд является $\mathfrak{Z}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}$ имеет только две неабелевы силовские подгруппы различного порядка, то $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа;*

2. *Если этот ряд является $\mathfrak{S}^0$-рядом группы $\mathfrak{G}$ и среди силовских подгрупп различного порядка группы $\mathfrak{G}$ имеются абелевы и гамильтонова группы всего по k—2 простым числам, где k—число различных простых делителей порядка группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа.*

Доказательство. 1. Пусть силовская подгруппа $\mathfrak{P}_1$ по числу $p_1=2$ группы $\mathfrak{G}$—гамильтонова группа, а силовские подгруппы $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots, \mathfrak{P}_{k-2}$группы $\mathfrak{G}$ по числам $p_2, p_3, \ldots, p_{k-2}$ — абелевы группы, причем Ord $(\mathfrak{P}_i) = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_{k-2}\}$—множество чисел p_i и $\mathfrak{S}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$ стабилизируется на специальной группе. Тогда, согласно теореме 1, $\mathfrak{G}$ — П-специальная группа, а потому она имеет инвариантную специальную подгруппу $\mathfrak{A}$, порядок которой делится на все числа $p_i^{\alpha_i}$, где $p_i \in \Pi$. Следовательно, фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ — разрешимая группа, а потому и $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа.

2. В случае $\mathfrak{Z}^0$-ряда доказательство аналогично.

Для характеристики группы, $\mathfrak{K}^0$-подгруппа которой является специальной группой, приведем следующую теорему.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$ является подгруппой Холла группы $\mathfrak{G}$ и притом специальной группой, то $\mathfrak{G}$ — П-специальная группа, где П — множество всех простых делителей порядка подгруппы $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$ и $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})) = \overline{E}$, где $\overline{E}$ — единичная группа.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Ord}(\mathfrak{G}) = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $k > 1$, Ord $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})) = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$; $m < k$ и $\Pi = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Пусть $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$—специальная группа. Так как при $m = k$ теорема очевидна, полагаем $m < k$. Тогда силовские подгруппы $\mathfrak{P}_i$ порядка $p_i^{\alpha_i}$, при $i \leq m$ группы $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$, являясь характеристическими подгруппами в группе $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$, будут инвариантны в $\mathfrak{G}$, а потому $\mathfrak{G}$— П-специальная группа. В то же время силовские подгруппы ,

$\mathfrak{P}_i$ группы $\mathfrak{G}$ при $i > m$ должны быть абелевыми группами согласно свойству 4 § 1. Но силовские подгруппы фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$ изоморфны силовским подгруппам $\mathfrak{P}_i$ группы $\mathfrak{G}$ при $i > m$ по соответствующим p_i. Значит, все силовские подгруппы фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$ — абелевы группы, а потому, согласно свойству 5 § 1, $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}/\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}))$ — единичная группа.

§ 2. Очевидно, что в специальной группе всякая $\mathfrak{H}^0$-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ совпадает с ее $\mathfrak{H}$-подгруппой. Однако ниоткуда не следует, что этим свойством обладает только специальная группа. Например, в прямом произведении $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ — абелева группа, а $\mathfrak{B}$ — простая группа составного порядка, у которой по крайней мере одна силовская подгруппа неабелева, $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{K}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{B}$. Приведем следующие две теоремы.

Теорема 4. *Для того чтобы неспециальная группа $\mathfrak{G}$ порядка n удовлетворяла условию $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{G})$, необходимо, чтобы: 1) n было не меньше 216, если $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ — абелева группа и 2) $n \geqslant 432$, если $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ — гамильтонова группа.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — неспециальная группа с условием $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{G})$. Тогда и фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$, как известно, не может быть специальной группой. Достаточно, очевидно, исследовать случай наименьшего возможного значения числа k простых делителей порядка группы $\mathfrak{G}$, т. е. случай $k = 2$. Наименьшие возможные простые делители порядка группы $\mathfrak{G}$ при этом будут: $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. Следовательно, $n = \mathrm{Ord}(\mathfrak{G}) = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}$. Согласно свойству 2 § 1, $\mathrm{Ord}(\mathfrak{S}^0(\mathfrak{G})) = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$, где $\beta_1 \geqslant 1$ и $\beta_2 \geqslant 1$. Так как $\mathfrak{G}$ — неспециальная группа, то ее силовские подгруппы по крайней мере по одному числу 2 или 3 будут неинвариантны в $\mathfrak{G}$, т. е. имеют место следующие случаи: 1-й случай — силовская подгруппа $\mathfrak{P}_1$ по числу 2 неинвариантна в $\mathfrak{G}$ или 2-й случай — силовская подгруппа $\mathfrak{P}_2$ по числу 3 неинвариантна в $\mathfrak{G}$. В первом случае, в силу леммы 3, подгруппа $\mathfrak{P}_1$ не может быть ни абелевой ни гамильтоновой группой, а потому $\alpha_1 \geqslant 3$. Если бы в этом случае силовская подгруппа $\mathfrak{P}_2$ оказалась абелевой группой, то она содержалась бы в $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{G})$. Но тогда $\mathrm{Ord}(\mathfrak{G}/\mathfrak{S}(\mathfrak{G}))$ был бы степенью простого числа, что невозможно в силу неспециальности фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$. Значит, $\mathfrak{P}_2$ не может быть абелевой группой, а потому $\alpha_2 \geqslant 3$. Итак, в первом случае $n \geqslant 2^3 \cdot 3^3 = 216$. Если $n = 216$, а $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ — гамильтонова группа, то $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ содержит группу кватернионов, т. е. силовская подгруппа $\mathfrak{P}_1$ содержится в $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$, что невозможно ввиду неспециальности фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$. Следовательно, в этом случае $n \geqslant 2^4 \cdot 3^3 = 432$. Во втором случае, когда силовская подгруппа $\mathfrak{P}_2$ по числу 3 не инвариантна в $\mathfrak{G}$, подгруппа $\mathfrak{P}_2$, в силу леммы 3, не может быть абелевой группой. Значит, $\alpha_2 \geqslant 3$. Если бы в этом случае силовская подгруппа $\mathfrak{P}_1$ была абелевой или гамильтоновой группой, то она содержалась бы в $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$. Но это невозможно ввиду неспециальности фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$. Следовательно, $\alpha_1 \geqslant 3$ и $n \geqslant 2^3 \cdot 3^3 = 216$. Случай, когда $\mathfrak{S}(\mathfrak{G})$ — гамильтонова группа, а $n = 216$ невозможен по той же причине. Значит, в случае гамильтонова ядра группы $\mathfrak{G}$ $n \geqslant 2^4 \cdot 3^3 = 432$.

Теперь теорема доказана полностью.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 5. *Для того чтобы неспециальная группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяла условию $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, необходимо, чтобы ее порядок был не меньше 216.*

§ 3. Будем рассматривать теперь такую группу $\mathfrak{G}$, у которой $\mathfrak{H}^0$-подгруппа любой ее подгруппы $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{H}$-подгруппой подгруппы $\mathfrak{M}$. Предварительно отметим одно из свойств группы типа S, т. е. неспециальной группы, все подгруппы которой специальны.

Лемма 4. *Группа $\mathfrak{G}$ типа S не удовлетворяет условию $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. Известно ([4], [5]), что порядок группы типа S имеет вид $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$, где p_1 и p_2 — различные простые числа, причем ее силовские подгруппы порядка $p_1^{\alpha_1}$—неинвариантные циклические, а силовская подгруппа порядка $p_2^{\alpha_2}$ инвариантна в группе и является коммутантом группы. В группе $\mathfrak{G}$ типа S $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, так как $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G})$ содержит силовские подгруппы порядка $p_1^{\alpha_1}$, а $\mathfrak{G}$ порождается классами этих силовских подгрупп. Однако $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{G}$, так как $\mathfrak{G}$ неабелева группа. Следовательно, $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Но $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{S}^0(\mathfrak{G})$, поэтому и $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$. В то же время $\mathfrak{S}(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{G}$, так как в противном случае $\mathfrak{G}$ была бы специальной группой. Следовательно, $\mathfrak{S}^0(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{S}(\mathfrak{G})$. Наконец, как легко проверить, $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G})$ является собственной подгруппой коммутанта $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$, т. е. $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{K}(\mathfrak{G})$.

Лемма доказана.

Докажем теорему, которая является необходимым и достаточным признаком специальности группы.

Теорема 6. *Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ была специальной, необходимо и достаточно, чтобы всякая ее подгруппа и сама группа $\mathfrak{G}$ обладали свойством: $\mathfrak{H}^0$-подгруппа (т. е. $\mathfrak{Z}^0$-подгруппа или $\mathfrak{S}^0$-подгруппа или $\mathfrak{K}^0$-подгруппа) любой подгруппы $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{G}$ и самой группы $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathfrak{H}$-подгруппой (т. е. соответственно с центром или ядром или коммутантом) этой подгруппы $\mathfrak{M}$ или соответственно самой группы $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. 1. Необходимость условия очевидна, так как всякая специальная группа $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{A}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{A})$.

2. Допустим, что существует такая неспециальная группа $\mathfrak{G}$, для которой выполняются условия $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ и $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{M}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — любая подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Тогда или $\mathfrak{G}$ — группа типа S, что противоречит допущению в силу леммы 4, или $\mathfrak{G}$ имеет по крайней мере одну подгруппу типа S, что также невозможно ввиду леммы 4. Следовательно, всякая группа $\mathfrak{G}$ с указанными выше условиями является специальной группой. Этим теорема 6 доказана.

Дополним теорему 6 еще следующей теоремой.

Теорема 7. *Группа $\mathfrak{G}$, у которой каждая собственная подгруппа $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{M}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{M})$, — или специальная группа, или группа типа S.*

Доказательство. Из определения группы $\mathfrak{G}$ типа S следует, что она, как и всякая специальная группа, удовлетворяет условию $\mathfrak{H}^0(\mathfrak{M}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{M}) \ldots (\alpha)$, где $\mathfrak{M}$ — любая собственная подгруппа $\mathfrak{G}$. Допустим, что существует неспециальная группа $\mathfrak{G}$ не типа S с этим же условием (α). Тогда $\mathfrak{G}$ должна иметь по крайней мере одну собственную подгруппу $\mathfrak{M}_1$ типа S. Но, согласно лемме 4, $\mathfrak{H}^0(m_1) \neq \mathfrak{H}(\mathfrak{M}_1)$, а это противоречит допущению. Следовательно, других неспециальных групп и условием (α), кроме групп типа S, не может быть.

Итак, $\mathfrak{G}$ — или специальная группа, или группа типа S.

§ 4. Рассмотрим еще группу $\mathfrak{G}$ с условием $\mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) \ldots (\varrho)$. Из приведенных в § 1 свойств 2 и 5 можно сделать следующие выводы

1. Если группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию (ϱ), то по крайней мере одна из ее силовских подгрупп — неабелева группа.

2. Всякая специальная группа $\mathfrak{G}$ с условием (ϱ) — метабелева группа.

Примером разрешимой группы с условием (ϱ) является группа кватернионов, а неразрешимой группы с этим условием — простая группа составного порядка, имеющая неабелеву силовскую подгруппу. К классу групп с условием (ϱ) относится, в частности, такая группа $\mathfrak{G}$, у которой $\mathfrak{Z}^0$-ряд совпадает с ее $\mathfrak{K}^0$-рядом. Чтобы выявить особенности такой группы, докажем сначала следующую лемму.

Лемма 5. *Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ была разрешима, необходимо, чтобы $\mathfrak{K}^0$-ряд ее оканчивался единицей.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа и ряд

$$\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{K}^{01} \supset \mathfrak{K}^{02} \supset \ldots \supset \mathfrak{K}^{0l} \qquad \text{(II)}$$

является ее $\mathfrak{K}^0$-рядом. Допустим, что ряд (II) стабилизируется на некотором, отличном от единицы, члене с номером t, т. е. $\mathfrak{K}^{0t+1} = \mathfrak{K}^{0t} \neq E$. Так как $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{K}^{0t}) \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{K}^{0t})$, то $\mathfrak{K}(\mathfrak{K}^{0t}) = \mathfrak{K}^{0t}$, т. е. подгруппа $\mathfrak{K}^{0t}$ совпадает со своим коммутантом, а потому является неразрешимой группой. Следовательно, и $\mathfrak{G}$ не может быть разрешимой группой, что противоречит условию.

Итак, ряд (II) должен оканчиваться единичной группой.

В связи с леммой 5 заметим, что приведенное в ней необходимое условие является недостаточным для разрешимости группы, что видно на примере любой простой группы составного порядка с абелевыми силовскими подгруппами.

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Если $\mathfrak{Z}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$ совпадает с ее $\mathfrak{K}^0$-рядом, то $\mathfrak{G}$-неразрешимая группа и ее порядок содержит по крайней мере один простой делитель не менее чем в третьей степени.*

Доказательство. Пусть в ряде (II) $\mathfrak{K}^{0i} = \mathfrak{Z}^{0i}$ при $i = 1, 2, \ldots, t$ и $\mathfrak{Z}^{0t+1} = \mathfrak{Z}^{0t}$. Если $t = 0$, т. е. $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}^0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, то, в силу свойства $\mathfrak{K}^0(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$, а потому $\mathfrak{G}$ — неразрешимая группа. Если $t > 0$, то, в силу свойства 2 § 1, $\mathfrak{K}^0$-ряд группы $\mathfrak{G}$ не может оканчиваться единицей, а потому, согласно лемме 5, $\mathfrak{G}$ не может быть разрешимой группой. В то же время, ввиду свойства 5 § 1, по крайней мере одна силовская подгруппа группы $\mathfrak{G}$ должна быть неабелева, а потому порядок этой силовской подгруппы равен по меньшей мере третьей степени простого числа.

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Азлецкий, О порождении конечной группы системой силовских классов, Матем. сб., 28 (70):2, 1951, 461—466.

2. С. П. Азлецкий, О некоторых П-свойствах конечных групп, Уч. зап. Уральск. гос. у-та, вып. 23 (матем., № 2), 1960, 3—18.

3. С. А. Чунихин, О П-свойствах конечных групп, Матем. сб., 25(67):3, 1949, 321—346.

4. О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальные. Тр. Семин. по теор. групп, 1938, 126—132.

5. С. А. Чунихин, О существовании подгрупп у конечной группы, Тр. Семин. по теор. групп, 1938, 106—125.

Поступила 22.II 1960 г.
Свердловск