Модели релятивистской теории поля и представление Мандельстама

В. П. Гачок

Изучение амплитуды рассеяния как функции двух переменных — энергии и передаваемого импульса — привело Мандельстама [1] в 1958 г. к гипотезе о существовании двойного спектрального представления для амплитуды рассеяния. Область аналитичности амплитуды рассеяния как функции двух независимых переменных, которая вытекает из этого представления, настолько широка, что ее нельзя получить из общих постулатов теории поля [2, 3]. К настоящему времени представление Мандельстама установлено лишь для некоторых простых диаграмм в теории возмущений [1, 4—6]. Так как это представление обладает рядом важных следствий, то его доказательство весьма желательно.

В настоящей заметке изучается класс моделей релятивистской теории поля, полевые операторы которых допускают разложение [7, 8]

$$A(x) = A^{in}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int dy_1 \dots dy_n f_n(x; y_1, \dots, y_n) : A^{in}(y_1) \dots A^{in}(y_n) :,$$

где $A^{in}(x)$ — свободное поле с массой m и

$$f_n(x; y_1, \dots, y_n) = K_{y_1}^m \dots K_{y_n}^m r(x; y_1, \dots, y_n), \; K_{y_i}^m = (\Box_{y_i} - m^2).$$

Функции $r(x; y_1, \dots, y_n)$ известным образом выражаются через полевые операторы и имеют специальный вид, учитывающий модельное условие, которое принимается в виде некоторого ограничения, налагаемого на полевые операторы.

Исследуется выполнение аксиом при таком модельном условии и устанавливается представление Мандельстама.

§ 1. Основные предположения

Рассматривается релятивистская теория нейтрального скалярного поля, которое описывается эрмитовым оператором $A(x)$. Предполагается, что, кроме обычных постулатов, таких как релятивистская инвариантность, спектральность, локальная коммутативность, асимптотическое условие, теория включает еще и некоторое модельное условие.

Модельное условие принимается в виде

$$[A(x), A(y)] = i\Delta'(x-y) + i \int dz\, f(x, y, z)\, j(z), \quad j(z) = K_z^m A(z), \tag{1}$$

где

$$\Delta'(x-y) = \int_0^{\infty} da^2 \varrho(a^2) D_{a^2}(x-y) = i \int_0^{\infty} da^2 \varrho(a^2) [A_{a^2}^{in}(x), A_{a^2}^{in}(y)], \tag{2}$$

$$\varrho(a^2) = \delta(a^2 - m^2) + \sigma(a^2), \; \sigma(a^2) = 0 \quad \text{для } a^2 < 4m^2. \tag{3}$$

Функция $f(x, y, z) = 0$ для $(x-y)^2 < 0$ и является решением уравнения

$$K_x^m K_y^m f(x, y, z) = v\left(x - y, \frac{x+y}{2} - z\right), \tag{4}$$

где $v\left(x - y, \frac{x+y}{2} - z\right)$ — некоторая произвольная лоренц-инвариантная функция, обладающая тем свойством, что ее преобразование Фурье $\tilde{v}(q_1, q_2)$ допускает представление

$$\tilde{v}(q_1, q_2) = \int du \varphi(u, \varkappa^2, q_2)\, \varepsilon(q_1^0 - u^0)\, \delta[(q_1 - u)^2 - \varkappa^2], \tag{5}$$

причем носитель функции $\varphi(u, \varkappa^2, q_2)$ сосредоточен в области

$$D = \left\{ \left(\frac{q_2}{2} \pm u \right) \in L^+, \; \varkappa^2 \geqslant \max \left[0, m_1 - \sqrt{\left(\frac{q_2}{2} + u \right)^2}, \right. \right.$$

$$\left. \left. m_1 - \sqrt{\left(\frac{q_2}{2} - u \right)^2} \right] \right\}, \tag{6}$$

где $m_1 = 2m$ — наименьшая масса состояния $|n\rangle$, для которого $\langle 0 | j(0) | n \rangle \neq 0$. Через L^+ обозначен верхний световой конус.

Так как формула (5) отвечает представлению Йоста—Лемана—Дайсона [9, 10], то функция $v\left(x - y, \frac{x+y}{2} - z\right)$ обладает свойством

$$v\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right)=0 \qquad \text{для}\ (x-y)^2<0. \tag{7}$$

Теперь, применяя к обеим сторонам равенства (1) операцию $K_x^m K_y^m$, получаем

$$[j(x), j(y)] = i\Delta'_\sigma(x-y) + i\int dz\, v\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right) j(z). \tag{8}$$

Учитывая (7), убеждаемся в справедливости равенства

$$[j(x), j(y)] = 0 \qquad \text{для} \quad (x-y)^2<0. \tag{9}$$

Осталось еще показать, что существуют такие решения $f(x, y, z)$ уравнения (4), при которых имеют место равенства

$$\left.\begin{array}{l}[A(x), A(y)] = 0\\ [A(x), j(y)] = 0\end{array}\right\} \quad \text{для} \quad (x-y)^2<0. \tag{10}$$

Для этого необходимо указать такой класс решений уравнения (4), при котором выполнялись бы соотношения (10). Это легко сделать с помощью запаздывающих и опережающих функций Грина. Действительно, пусть для определенности правая часть уравнения (4) имеет вид $v_R\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right) = \theta(x-y)\, v\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right)$. Тогда, например, такой класс функций $f(x, y, z)$ задается формулой

$$f_1(x, y, z) = \iint \Delta_R(x-x')\,\Delta_R(y-y')\, v_R\left(x'-y',\ \frac{x'+y'}{2}-z\right) dx'dy'. \tag{11}$$

Аналогично получаем другой класс решений для случая, когда правая часть уравнения (4) имеет вид $v_A\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right) = \theta(y-x)\, v\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right)$,

$$f_2(x, y, z) = \iint \Delta_A(x-x')\,\Delta_A(y-y')\, v_A\left(x'-y',\ \frac{x'+y'}{2}-z\right) dx'dy'. \tag{12}$$

Тогда класс функций $f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (4), так как функция

$$v\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right) = v_R\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right) + v_A\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функции $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ обращаются в нуль для $(x-y)^2<0$. Это означает, что построенный класс функций обеспечивает выполнение условия (9) и первого из равенств в (10). Второе из равенств в (10) также выполняется, так как функция $K_y^m f(x, y, z)$ исчезает в области $(x-y)^2<0$. Это следует из того, что функции

$$K_y^m f_1(x, y, z) = \int \Delta_R(x-x')\, v_R\left(x'-y,\ \frac{x'+y}{2}-z\right) dx',$$

$$K_y^m f_2(x, y, z) = \int \Delta_A(x-x')\, v_A\left(x'-y,\ \frac{x'+y}{2}-z\right) dx'$$

исчезают в области $(x-y)^2 < 0$. Таким образом, модельное условие (1) учитывает причинность в виде локальной коммутативности. Из (2—5) также видно, что модельное условие учитывает лоренц-инвариантность и спектральность.

До сих пор мы рассматривали только одно поле. Полученная схема обобщается и на случай нескольких полей. Все рассуждения могут быть перенесены и на тот случай, когда модельное условие (1) принимается в виде

$$[A(x), A(y)] = i\Delta'(x-y) + i\int dz\, f'(x,y,z)\, A(z).$$

Для учета спектральных свойств следует предположить

$$\widetilde{v'}(q_1, q_2) = \theta(q_2^0 - 2m)\widetilde{v}(q_1, q_2).$$

В данном случае проверка таких условий, как условие положительной определенности, унитарности, встречает те же трудности, что и в общей теории. Их можно проверить лишь в некоторых простейших случаях.

§ 2. Двойные дисперсионные соотношения

Рассмотрим амплитуду процесса $p + k \to p' + k'$, где p, k — начальные и p', k' — конечные импульсы частиц с массой m. В дальнейших выводах и обозначениях будем следовать Леману [3], принимая во внимание случай равных масс. В качестве независимых инвариантов, по которым будут исследоваться аналитические свойства амплитуды, выбираются

$$W^2 = (p+k)^2, \qquad \Delta^2 = -\frac{(k-k')^2}{4},$$
$$\zeta = k^2 = k'^2, \qquad \omega = \frac{(k+k')(p+p')}{2\sqrt{(p+p')^2}}. \tag{13}$$

Тогда для $\zeta < \zeta_1 < -\Delta^2$ справедливо

$$T(\omega, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{4m^2}^{\infty} dW'^2 M(W'^2, \Delta^2, \zeta_1) \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{W^2 - W'^2} + \frac{1}{W'^2 + W^2 - 4\Delta^2 - 2m^2 - 2\zeta_1}\right\}, \tag{14}$$

где

$$M(W^2, \Delta^2, \zeta_1) = 2\pi\int dx_1 \int dx_2 e^{i\frac{k'-p'}{2}x_1 - i\frac{k-p}{2}x_2} \times$$
$$\times \sum_{\gamma} < 0 | R'A\left(\frac{x_1}{2}\right) A\left(-\frac{x_1}{2}\right) | p+k, \gamma > \times$$
$$\times < p+k, \gamma \left| R'A\left(\frac{x_2}{2}\right) A\left(-\frac{x_2}{2}\right)\right| 0 >. \tag{15}$$

Формула (15) справедлива для $\zeta_1 < m_1^2$.

С помощью модельного условия (8) получаем

$$<0\left| R'A\left(\frac{x_1}{2}\right) A\left(-\frac{x_1}{2}\right)\right| p+k, \gamma> = \int v_R(x_1, -z) <0 | j(z) | p+k, \gamma> dz =$$
$$= \int e^{-i(p+k)z} v_R(x_1, -z)\, dz <0 | j(0) | p+k, \gamma>,$$

$$< p+k, \gamma \left| R'A\left(\frac{x_2}{2}\right) A\left(-\frac{x_2}{2}\right) \right| 0 > = \int v_R(x_2, -z) \langle p+k, \gamma \mid j(z) \mid 0 \rangle dz =$$

$$= \int e^{i(p+k)z} v_R(x_2, -z)\, dz \langle p+k, \gamma \mid j(0) \mid 0 \rangle.$$

Подставляя в (15), находим

$$M(W^2, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma} \tilde{v}_R\left(\frac{k'-p'}{2}, p+k\right) \tilde{v}_R\left(-\frac{k-p}{2}, -p-k\right) \times$$

$$\times |\langle 0 \mid j(0) \mid p+k, \gamma \rangle|^2. \tag{16}$$

Теперь с помощью (5) можем записать представление

$$M(W^2, \Delta^2, \zeta_1) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Phi(u_1, \varkappa_1^2, u_2, \varkappa_2^2, (p+k)^2)\, du_1 d\varkappa_1^2 du_2 d\varkappa_2^2}{\left[\left(\frac{k'-p'}{2} - u_1\right)^2 - \varkappa_1^2\right]\left[\left(\frac{k-p}{2} - u_2\right)^2 - \varkappa_2^2\right]}, \tag{17}$$

где

$$\Phi(u_1, \varkappa_1^2, u_2, \varkappa_2^2, (p+k)^2) = \sum_{\gamma} \varphi_\gamma(u_1, \varkappa_1^2, (p+k)^2)\, \varphi_\gamma^*(u_2, \varkappa_2^2, (p+k)^2) \times$$

$$\times |\langle 0 \mid j(0) \mid p+k, \gamma \rangle|^2. \tag{18}$$

Заметим, что в правой части (18) отсутствуют интеграции по внутренним промежуточным импульсам в отличие случая работы [3]. Из дальнейших доказательств будет видно, что именно этот факт существенно расширяет область аналитичности функции $M(W^2, \Delta^2, \zeta_1)$.

Согласно (6), носители функций $\varphi_\gamma(u_1, \varkappa_1^2, (p+k)^2)$ и $\varphi_\gamma^*(u_2, \varkappa_2^2, (p+k)^2)$ сосредоточены, соответственно, в областях D_1 и D_2, где

$$D_{1,2} = \left\{\left(\frac{p+k}{2} \pm u_{1,2}\right) \in L^+, \right. \tag{19}$$

$$\left. \varkappa_{1,2}^2 \geqslant \max\left[0, m_1 - \sqrt{\left(\frac{p+k}{2} + u_{1,2}\right)^2}, m_1 - \sqrt{\left(\frac{p+k}{2} - u_{1,2}\right)^2}\right]\right\}.$$

Введением новых переменных интегрирования

$$\vec{k} = K(1, 0, 0), \quad \vec{k}' = K(\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

$$\vec{u}_i = r_i(\cos\varphi_i \sin\theta_i, \sin\varphi_i \sin\theta_i, \cos\theta_i), \quad i = 1, 2, \quad \alpha = \varphi_1 - \varphi_2$$

и переходом к системе центра масс интегральное выражение (17) приводится к виду

$$M(W^2, \Delta^2, \zeta_1) = \int du_i^0 \int dr_i \int d\varkappa_i^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \times \frac{y_1 \sqrt{y_1^2 - K^2} + y_2 \sqrt{y_2^2 - K^2}}{K^2 [y - \cos(\theta - \alpha)]} \times$$

$$\times \Phi(u_i^0, r_i^2, \varkappa_i^2, W^2), \tag{20}$$

где

$$Y = \frac{1}{K^2} [y_1 y_2 + \sqrt{y_1^2 - K^2} \sqrt{y_2^2 - K^2}],$$

$$K^2 = \frac{(W^2 + m^2 - \zeta_1)^2 - 4mW^2}{4W^2},$$

$$y_i = \frac{K^2 + r_i^2 + \varkappa_i^2 - [u_i^0 + (m^2 - \zeta_1)/2W]^2}{2r_i}.$$

Так как функция $\Phi(u_1^0, r_i^2, \varkappa_i^2, W^2)$ не зависит от α, то в (20) интеграция по α может быть выполнена с помощью равенства

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{Y-\cos(\theta-\alpha)} = \frac{Y}{\sqrt{1-Y^2}}\left[L\begin{pmatrix}-+-\\-++\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}--+\\---\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + L\begin{pmatrix}++-\\---\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}+-+\\+--\end{pmatrix}\right] + \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-Y^2}}\left[L\begin{pmatrix}--+\\---\end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - L\begin{pmatrix}-+-\\-++\end{pmatrix} + L\begin{pmatrix}++-\\+++\end{pmatrix} - L\begin{pmatrix}+-+\\+--\end{pmatrix}\right],$$

$$L\begin{pmatrix}+-+\\+--\end{pmatrix} = \ln\frac{Y+\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{1-Y^2}}{Y+\sin\theta-\cos\theta-\sqrt{1-Y^2}}. \tag{21}$$

С помощью этого равенства приходим к выводу, что сингулярности функции $M(W^2, \Delta^2, \zeta_1)$ описываются двумя действительными кривыми

$$Y = \pm\cos\theta.$$

Учитывая (19) и вводя переменные $s = W^2$ и $t = -4\Delta^2$, кривые сингулярностей приводим к виду

$$\begin{cases} t = \psi(s) = 4\,\dfrac{(m_1^2-m^2)^2}{s}, \quad K^2 = \dfrac{s-4m^2}{4}. \\ t = -4K^2 - \psi(s), \end{cases} \tag{22}$$

Ситуация аналогична случаю четвертого порядка теории возмущений [11], когда угол α принимает значения 0°, 180°. Здесь, по существу, тот же самый результат получен за счет выполнения интеграции по α.

Теперь можем найти крайние точки интервала аналитичности функции $M(s, t)$ по t при всех $s \geqslant 4m^2$:
$t_{\max} = 0$,
$t_{\min} = -m^2$.

Таким образом, функция $M(s, t)$ аналитична в комплексной t-плоскости с разрезами, идущими от $-\infty$ до $t_{\min}$ и от $t_{\max}$ до $+\infty$. Этого достаточно для установления двойных дисперсионных соотношений. Представление Мандельстама также можно выписать, известным образом комбинируя результаты для двух других процессов [1].

§ 3. Заключительные замечания

Таким образом, класс моделей, операторы которых допускают разложения по нормальным произведениям свободных полей с весовыми функциями, учитывающими модельное условие (1), допускает представление Мандельстама. Модельное условие (1) является лишь достаточным условием для существования представления Мандельстама.

Предлагаемая схема может быть еще осмыслена как некоторый апроксимационный метод. Действительно, закладывая разумную информацию в вершинную функцию с помощью модельного условия, этим самым определяем и все другие функции Грина высших порядков. Подтверждением этого и служат результаты данной работы.

Заслуживает внимания обсуждение вопросов, связанных с выполнением тождества Якоби. Ограничимся частным случаем модельного условия (1), когда

$$[j(x),\ j(y)] = i\Delta'_\sigma(x-y)\,[I + j(x) + j(y)].$$

Тогда можно вычислить

$$D^j_{12} = <0\,|\,[j(x_1),\ j(x_2)]\,|\,0> = i\Delta'_\sigma(x_1 - x_2),$$

$$D^j_{123} = <0\,|\,[[j(x_1),\ j(x_2)],\ j(x_3)]\,|\,0> = i\Delta'_\sigma(x_1 - x_2)\{<0\,|\,[j(x_1),\ j(x_3)]\,|0> +$$

$$+ <0\,|\,[j(x_2),\ j(x_3)]\,|\,0>\} = -\int_0^\infty ds \int_0^\infty dt\, \sigma(s)\,\sigma(t)\,D_s(x_1 - x_2)\,D_t(x_1 - x_3) -$$

$$-\int_0^\infty ds \int_0^\infty du\, \sigma(s)\,\sigma(u)\,D_s(x_1 - x_2)\,D_u(x_2 - x_3),$$

$$D^j_{231} = -\int_0^\infty ds \int_0^\infty du\, \sigma(s)\,\sigma(u)\,D_s(x_2 - x_1)\,D_u(x_2 - x_3) -$$

$$-\int_0^\infty dt \int_0^\infty du\, \sigma(t)\,\sigma(u)\,D_t(x_3 - x_1)\,D_u(x_2 - x_3),$$

$$D^j_{312} = -\int_0^\infty dt \int_0^\infty du\, \sigma(t)\,\sigma(u)\,D_t(x_3 - x_1)\,D_u(x_3 - x_2) -$$

$$-\int_0^\infty ds \int_0^\infty dt\, \sigma(s)\,\sigma(t)\,D_s(x_1 - x_2)\,D_t(x_3 - x_1).$$

Теперь уже можно убедиться в справедливости тождества

$$D^j_{123} + D^j_{231} + D^j_{312} \equiv 0.$$

Таким образом, вакуумное ожидание двойного коммутатора токов учитывает тождество Якоби. Амплитуды в этом частном случае зависят только от одного инварианта — энергии. Так, для вершинной функции

$$T(k_1,\ k_2,\ k_3) = \int e^{-ik_1x_1 + ik_2x_2 + ik_3x_3}\, r(x_1;\ x_2,\ x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3,$$

где $r(0;\ x,\ y) = \theta(-x)\,\theta(x-y) <0\,|\,[[j(0),\ j(x)],\ j(y)]\,|\,0> +$

$$+ \theta(-y)\,\theta(y-x) <0\,|\,[[j(0), j(y)],\quad j(x)]\,|\,0>,$$

$$x = x_2 - x_1 \qquad y = x_3 - x_1, \qquad k_1 - k_2 - k_3 = 0,$$

имеет место представление

$$T(\xi,\ \eta,\ t) = \int_{4m^2}^\infty \frac{\sigma(t')dt'}{t - t'}\left[\int_{4m^2}^\infty \frac{\sigma(\xi')\,d\xi'}{\xi - \xi'} + \int_{4m^2}^\infty \frac{\sigma(\eta')\,d\eta'}{\eta - \eta'}\right] + \widetilde{M}(\xi,\ \eta),$$

где $\xi = k_2^2, \qquad \eta = k_3^2, \qquad t = (k_2 + k_3)^2,$

$$\widetilde{M}(\xi,\ \eta) = \int_{4m^2}^\infty \int_{4m^2}^\infty \frac{\sigma(\xi')\,\sigma(\eta')\,d\xi' d\eta'}{(\xi - \xi')(\eta - \eta')}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Mandelstam, Phys. Rev., 112, 1958, 1344.
2. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев и М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958.
3. H. Lehmann, Nuovo C., 10, 1958, 579.

4. J. Tarski, J. Math. Phys., 1, 1960, 567.
5. В. С. Владимиров, УМЖ, т. 12, 1960, 132.
6. В. И. Коломыцев, УМЖ, т. 14, 1962, 129.
7. V. Glazer, H. Lehmann, W. Zimmermann, Nuovo C., 6, 1957, 1122.
8. В. П. Гачок, ЖЭТФ (в печати).
9. R. Jost and H. Lehmann, Nuovo C., 5, 1957, 1958.
10. F. Dyson, Phys. Rev., **110**, 1958, 1460.
11. А. В. Астахов, ДАН СССР, т. 133, 1960, 307.

Поступила 12.VI 1963 г.
Киев