Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных ядер (случай многих переменных)

В. И. Горбачук

1. Пусть $G=G^{(1)}\times\ldots\times G^{(n)}$, $G^{(i)}=(a_i, b_i)\,(-\infty\leqslant a_i,\ b_i\leqslant\infty,\ i=1,\ldots,n)$— область n-мерного эвклидового пространства E_n. Непрерывное эрмитово ядро $K(x,\ y)\,(x,\ y\in G)$ назовем эрмитово-индефинитным (э. и.) с $\varkappa$ отрицательными квадратами, если при любом натуральном m форма

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} K(x_j,\ x_k)\,\xi_k\bar{\xi}_j \qquad (x_j\in G,\quad j=1,\ \ldots,\ m) \tag{1}$$

имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов и хотя бы при одном m форма (1) имеет точно $\varkappa$ отрицательных квадратов.

Рассмотрим совокупность $C_0^\infty(G)$ всех финитных бесконечно дифференцируемых внутри G функций $\varphi(x)\,(x\in G)$. Введем в ней индефинитное скалярное произведение [1]

$$\langle\varphi,\ \psi\rangle=\iint\limits_G K(x,\ y)\,\varphi(y)\,\overline{\psi(x)}\,dxdy. \tag{2}$$

Беря фактор-пространство $C_0^\infty(G)/M$, где M — изотропное подпространство $C_0^\infty(G)$, а затем пополняя, как указывалось в [2], получим пространство с индефинитной метрикой типа $\Pi_\varkappa$ [1].

2. Пусть $L^{(1)},\ \ldots,\ L^{(n)}$ — обыкновенные дифференциальные выражения порядков $r_1,\ \ldots,\ r_n$ соответственно:

$$L^{(i)}u(t)=\sum_{k_i\leqslant r_i} a_{k_i}(t)\,\frac{d^k u(t)}{dt^k} \qquad (t\in(a_i,\ b_i)) \tag{3}$$

с комплекснозначными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Предположим, что в смысле обобщенных функций Шварца

$$L_{x_i}^{(i)}K(x,\ y)=\overline{L_{y_i}^{(i)}}\,K(x,\ y). \tag{4}$$

Определим на $C_0^\infty(G)$ операторы $L_0^{(i)}$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$:

$$L_0^{(i)}\varphi(x)=\overline{L_{x_i}^{(i)+}}\,\varphi(x) \qquad (\varphi\in C_0^\infty(G))$$

($+$ обозначает переход к формально сопряженному по Лагранжу дифференциальному выражению, а черта — переход к комплексно-сопряженным коэффициентам). Операторы $L_0^{(i)}$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ коммутируют между собой и, благодаря (4), эрмитовы в $\Pi_\varkappa$. Их самосопряженные расширения в пространствах типа $\Pi_\varkappa$, вообще говоря, более широких, чем исходнсе $\Pi_\varkappa$ [1, 2], обозначим $L^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, n$). Используя результаты работ [1 и 3], аналогично [2], получим, что обобщенные в смысле Шварца ядра

$$\Phi_i(x, y) = [\bar{P}_i(L^{(i)})]_{x_i}[P_i(\overline{L^{(i)}})]_{y_i} K(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $P_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$) — минимальные многочлены операторов $L^{(i)}$ в правильных для $\overline{L^{(i)}}$ (см. [4]) подпространствах $\Gamma^{(i)}$, положительно определены. Ядро

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x, y)$$

также является положительно определенным обобщенным ядром. Из (4) следует, что для $\Phi(x, y)$ также справедливы в обобщенном смысле соотношения

$$L_{x_i}^{(i)} \Phi(x, y) = \overline{L_{y_i}^{(i)}} \Phi(x, y) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

3. Обозначим H_Φ пространство Гильберта, полученное после отождествления в $C_0^\infty(G)$, а затем пополнения по метрике, задаваемой скалярным произведением

$$[\varphi, \psi] = (\Phi(x, y), \qquad \varphi(y)\overline{\psi(x)}) \qquad (\varphi, \psi \in C_0^\infty(G))$$

((α, ψ) обозначает действие функционала α на основную функцию ψ). Зафиксируем далее в каждом интервале $G^{(i)}$ некоторую точку a_j и обозначим $\chi_0^{(j)}(x_j, \lambda_j), \ldots, \chi_{r_j-1}^{(j)}(x_j, \lambda_j)$ фундаментальную систему решений уравнения $L^{(j)}u = \lambda_j u \qquad (x_j \in G^{(j)})$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \chi_m(x_j, \lambda_j)|_{x_j = a_j} = \delta_{mk} \qquad (m, k = 0, 1, \ldots, r_j - 1; \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Положим

$$\mathrm{X}_\alpha(x; \lambda) = \chi_{\alpha_1}^{(1)}(x_1, \lambda_1) \ldots \chi_{\alpha_n}^{(n)}(x_n; \lambda_n)$$

$$(x = (x_1, \ldots, x_n); \qquad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n),$$

где векторный индекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ меняется по целочисленному параллелепипеду A точек с координатами $\alpha_1 = 0, 1, \ldots, r_1 - 1; \ldots; \alpha_n = 0, 1, \ldots, r_n - 1$. Тогда [5, 6] при условии, что операторы $L_0^{(1)}$ ($i = 1, \ldots, n$), как действующие в H_Φ, допускают коммутирующие между собой самосопряженные расширения, ядро $\Phi(x, y)$ представляется в обобщенном смысле в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} [\bar{P}_i(L^{(i)})]_{x_i}[P_i(\overline{L^{(1)}})]_{y_i} K(x, y) =$$

$$= \int_{E_n} \sum_{\alpha, \beta \in A} \mathrm{X}_\alpha(x; \lambda) \overline{\mathrm{X}_\beta(y; \lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \qquad (x, y \in G), \tag{6}$$

где $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha, \beta \in A}$ — положительно определенная матрица. Решая уравнение (6) относительно $K(x, y)$, получим, аналогично [2], что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть обыкновенные дифференциальные выражения $L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}$ таковы, что операторы $L_0^{(1)}, \ldots, L_0^{(n)}$, рассматриваемые* *в пространстве H_Φ, допускают там коммутирующие между собой самосопряженные расширения. Тогда непрерывное э. и. ядро $K(x, y)$ $(x, y \in G)$, удовлетворяющее условиям (4), допускает в смысле обобщенных функций Шварца представление*

$$K(x, y) = T_\varrho(x, y) +$$

$$+ \int\limits_{E_n} \frac{\sum\limits_{\alpha,\, \beta \in A} [X_\alpha(x; \lambda) \overline{X_\beta(y; \lambda)} - S_\varrho^{(\alpha\beta)}(\lambda; x, y)]}{\sum\limits_{i=1}^{n} |P_i(\lambda_i)|^2} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \qquad (7)$$

с некоторой положительно определенной матрицей $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\, \beta \in A}$, в котором $S_\varrho^{(\alpha,\beta)}(\lambda; x, y)$ — регуляризирующая поправка, равная произведению $\sum\limits_{i=1}^{n} |P_i(\lambda_i)|^2$ на сумму главных частей функции $X_\alpha(x; \lambda) \overline{X_\beta(y; \lambda)} \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} |P_i|(\lambda_i)|^2$ относительно ее полюсов—точек $E_m = (\varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_m)$, где ε_m $(m = 1, \ldots, s',\ s' \leqslant \varkappa)$ — общие вещественные корни полиномов $P_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, при $|\lambda| < \varrho$ $(\varrho \geqslant \max|\varepsilon_m|,\ m = 1, \ldots, s')$ и нулю при $|\lambda| \geqslant \varrho$, а $T_\varrho(x, y)$ — некоторое решение уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} [\overline{P_i}(L^{(i)})]_{x_i} \times$ $\times [P_i(\overline{L^{(i)}})]_{y_i} u(x, y) = 0$.

Более того, можно показать, что интеграл в (7) сходится в смысле пространства $L_2(E_l, (-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$, где l — порядок матрицы $d\sigma(\lambda) = \| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha\ \beta \in A}$.

Если выражения $L^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ таковы, что $P_i(t)$ не имеют общих корней, то

$$K(x, y) = T(x, y) + \int\limits_{E_n} \sum\limits_{\alpha,\, \beta \in A} X_\alpha(x; \lambda) \overline{X_\beta(y; \lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda).$$

Заметим, что пространство $L_2(E_l, (-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))$ получается после отождествления и пополнения совокупности $C_0(E_l, (-\infty, \infty))$ сильно непрерывных вектор-функций $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ со значениями в E_l по метрике, определяемой с помощью скалярного произведения

$$(f, g)_{L_2(E_l, (-\infty, \infty), d\sigma(\lambda))} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (d\sigma(\lambda) f(\lambda), g(\lambda))_{E_l} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{\alpha=1}^{N} (\sigma(\Delta_\alpha) f(\lambda_\alpha), g(\lambda_\alpha))_{E_l},$$

где справа стоит интегральная сумма типа Римана—Стильтьеса (Δ_α — интервалы, на которые разбита ось, $\sigma(\Delta_\alpha)$ — приращение $\sigma(\lambda)$ на Δ_α, $\lambda_\alpha \in \Delta_\alpha$).

4. Теорема 1 дает возможность построить ряд примеров представлений.

Пример 1. Непрерывная функция $k(t)$ $(t \in E_n,\ k(t) = \overline{k(-t)}$ называется э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами, если ядро $K(x, y) = k(y - x)$ $(x, y \in E_n)$ э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами.

Теорема 2. *Э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами функция $k(t)$ $(t \in E_n)$ допускает представление*

$$k(t) = h_\varrho(t) + \int\limits_{E_n} \frac{e^{i\lambda t} - S_\varrho(\lambda;\ t)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |P_i(\lambda_i)|^2}\, d\sigma(\lambda) \quad (t \in E_n),$$

$$(\lambda t = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n),$$

где $d\sigma(\lambda)$ — *неотрицательная мера такая, что* $\int\limits_{|\lambda|>\varrho} \frac{d\sigma(\lambda)}{(1+|\lambda|^2)^\varkappa} < \infty$, $S_\varrho(\lambda, t)$ — *регуляризирующая поправка,* $h_\varrho(t)$—*некоторое решение уравнения*

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{P}_j \left(-i\, \frac{\partial}{\partial x_j} \left(P - i\, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) h(x) = 0.\right.$$

Это вытекает из теоремы 1. Нужно только положить $L^{(j)} = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ и воспользоваться тем фактом, что замыкания операторов $L_0^{(j)}\varphi = -i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi$ $(\varphi \in C_0^\infty(E_n))$ в H_F, $F = f(y-x)$, где $f(x)$ — любая положительно определенная функция на всем E_n, являются самосопряженными и коммутирующими между собой операторами (см. [6]).

Пример 2. Пусть $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(n)}$, где $G^{(i)} = (-a_i,\ a_i)$, $a_i \leqslant \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема 3. *Если э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами функция $k(t)$ $(t \in G)$ аналитическая в G, то она допускает интегральное представление*

$$k(t) = h_\varrho(t) + \int\limits_{E_n} \frac{e^{i\lambda t} - S_\varrho(\lambda;\ t)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |P_i(\lambda_i)|^2}\, d\sigma(\lambda) \quad (t \in G).$$

Это вытекает из того, что функция $F = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{P}_j\left(-i\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right) P_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f$ — аналитическая в G и, как известно, см., например, [6], замыкания операторов $L_0^{(j)}\varphi = -i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ $(\varphi \in C_0^\infty(G))$ самосопряжены в $H_{F(y-x)}$ и коммутируют между собой.

Пример 3. Пусть $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(n)}$, $G^{(i)} = (a_i, b_i)$, $-\infty \leqslant a_i,\ b_i \leqslant \infty$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 4. *Пусть $2\varkappa$ раз непрерывно дифференцируемая в G функция $k(t)$ $(t \in 2G)$ такова, что ядро $K(x,\ y) = k(x+y)$ $(x,\ y \in G)$ э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами. Тогда*

$$k(x) = T_\varrho(x) + \int\limits_{E_n} \frac{e^{\lambda x} - S_\varrho(\lambda;\ x)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |P_i(\lambda_i)|^2}\, d\sigma(\lambda),$$

где $S_\varrho(x;\ \lambda)$ — регуляризирующая поправка, $d\sigma(\lambda)$ — неотрицательная мера в E_n, $P_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — некоторые полиномы степеней $\leqslant \varkappa$, $T_\varrho(x)$ — некоторое решение уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{P}_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) P_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) T(x) = 0$. *Интеграл сходится в обычном смысле.*

Это следует из теоремы 1 если положить $L^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x}$ и использовать тот факт, что замыкания операторов $L_0^{(i)}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ $(\varphi \in C_0^\infty(G))$ самосопряжены в пространстве H_Φ, где $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) P_i\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) k(x+y)$ — положительно определенное ядро (см. [6]).

Пример 4. Имеет место теорема.

Теорема 5. Пусть $L^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ — обыкновенные дифференциальные выражения по переменным x_j соответственно порядков r_j с постоянными коэффициентами; $K(x, y)$ $(x, y \in E_n)$ — $2r_j\varkappa$ раз непрерывно дифференцируемое по x_j и y_j э. и. ядро с $\varkappa$ отрицательными квадратами, удовлетворяющее соотношениям

$$L_{x_j}^{(j)} K(x, y) = \overline{L_{y_j}^{(j)}} K(x, y) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Предположим, что выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_j+\beta_j} K(x, y)}{\partial x_j^{\alpha_j} \partial y_j^{\beta_j}} \right| \leqslant C_j e^{N_j (|x_1|^{r_1'} + \ldots + |x_n|^{r_n'} + |y_1|^{r_1'} + \ldots + |y_n|^{r_n'})}$$

$$(G_j > 0; \qquad j = 1, \ldots, n; \qquad \alpha_j, \beta_j = 0, 1, \ldots, r_j\varkappa), \tag{8}$$

где $\frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_j'} = 1$ при $r_j > 1$ в случае $r_j = 1$, r_j' — произвольное положительное число, N_j — некоторые константы. Тогда для ядра $K(x, y)$ имеет место представление (7). При этом дополнительно предполагается, что каждый из операторов $u \to \overline{L^{(j)+}} u$ $(u \in C_0^\infty(E_n),\ j = 1, \ldots, n)$ в H_Φ имеет равные дефектные числа.

Наметим ход доказательства. Благодаря (8) положительно определенное ядро $\Phi = \sum_{i=1}^{n} [\overline{P}_i(L^{(i)})]_{x_i} [P_i(L^{(i)})]_{y_i} K$ удовлетворяет оценке $|\Phi(x, y)| \leqslant$ $< Ce^{N(|x_1|^{r_1'} + \ldots + |x_n|^{r_n'} + |y_1|^{r_1'} + \ldots + |y_n|^{r_n'})}$, где C и N — некоторые константы. Пользуясь тогда теоремой о представлении таких ядер в виде (6) (см. [6]), получим требуемое.

В заключение автор благодарит Ю. М. Березанского за руководство этой работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, Тр. Моск. матем. об-ва, т. 5, 1956.

2. В. И. Плющева (Горбачук), Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных ядер с конечным числом отрицательных квадратов, ДАН СССР, т. 145, № 3, 1962.

3. Л. С. Понтрягин, Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 8, № 6, 1944.

4. И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, Тр. Моск. матем. об-ва, т. 8, 1959.

5. Ю. М. Березанский, Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера, ДАН СССР, т. 136, № 5, 1961.

6. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд-во АН УССР, К., 1964.

Поступила 1.VIII 1963 г.
Киев