О существовании регулярного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности неподвижной особой точки

М. Г. Миракьян

Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
z^2 \frac{dw_1}{dz} &= za_{0,0}(z) + a_{1,0}(z)\, w_1 + a_{0,1}(z)\, w_2 + \sum_{k_1+k_2=2}^{\infty} a_{k_1 k_2}(z)\, w_1^{k_1} w_2^{k_2}, \\
z^2 \frac{dw_2}{dz} &= zb_{0,0}(z) + b_{1,0}(z)\, w_1 + b_{0,1}(z)\, w_2 + \sum_{k_1+k_2=2}^{\infty} b_{k_1 k_2}(z)\, w_1^{k_1} w_2^{k_2},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где функции $a_{ij}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} z^k$ и $b_{ij}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{ij}^{(k)} z^{(k)}$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ регулярны при $|z| \leqslant \varrho_1$. Вообще, правые части системы (1) предполагаются регулярными функциями от z, w_1, w_2 при

$$|z| \leqslant \varrho_1, \qquad |w_1| \leqslant \varrho_2, \qquad |w_2| \leqslant \varrho_2.$$

В дальнейшем будет рассмотрено асимптотическое поведение решения системы (1) в окрестности точки $z = 0$, которая является для данной системы особой точкой.

Следует заметить, что аналогичные вопросы для линейных однородных систем были рассмотрены, в частности, в работах [1, 2 и 3].

Результаты, содержащиеся в настоящей статье, являются непосредственным продолжением и обобщением исследований, проведенных в работах [4 и 5].

Ищем решения системы в виде формальных степенных рядов

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots, \\ w_2 &= \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_n z^n + \ldots. \end{aligned} \tag{2}$$

Ряды (2) являются, вообще говоря, расходящимися, а их коэффициенты α_n и β_n ($n = 1, 2, \ldots$) определяются однозначно при условии

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,0}^{(0)} & a_{0,1}^{(0)} \\ b_{1,0}^{(0)} & b_{0,1}^{(0)} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Из следующей системы:

$$\begin{aligned} a_{1,0}^{(0)}\alpha_n + a_{0,1}^{(0)}\beta_n &= (n-1)\,\alpha_{n-1} - [A_{1,0}^{(n)} + A_{0,1}^{(n)}] - [A_{1,1}^{(n)} + A_{2,0}^{(n)} + A_{0,2}^{(n)}] - \\ &\quad - \ldots - [A_{n,0}^{(n)} + A_{n-1,1}^{(n)} + \ldots + A_{0,n}^{(n)}], \\ b_{1,0}^{(0)}\alpha_n + b_{0,1}^{(0)}\beta_n &= (n-1)\,\beta_{n-1} - [B_{1,0}^{(n)} + B_{0,1}^{(n)}] - [B_{1,1}^{(n)} + B_{2,0}^{(n)} + B_{0,2}^{(n)}] - \\ &\quad - \ldots - [B_{n,0}^{(n)} + B_{n-1,1}^{(n)} + \ldots + B_{0,n}^{(n)}] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$A_{1,0}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{1,0}^{(k)}\alpha_{n-k}, \qquad A_{0,1}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{0,1}^{(k)}\beta_{n-k},$$

$$A_{2,0}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-k-1} a_{2,0}^{(k)}\alpha_i\alpha_{n-k-i}, \qquad A_{1,1}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-k-1} a_{1,1}^{(k)}\alpha_i\beta_{n-k-i},$$

$$A_{0,2}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-k-1} a_{0,2}^{(k)}\beta_i\beta_{n-k-i},$$

. . . .

$$A_{n,0}^{(n)} = a_{n,0}^{(0)}\alpha_1^n, \qquad A_{n-1,1}^{(n)} = a_{n-1,1}^{(0)}\alpha_1^{n-1}\beta_1, \ \ldots, \ A_{0,n}^{(n)} = a_{0,n}^{(0)}\beta_1^n.$$

Выражения $B_{ij}^{(n)}$ ($i, j = 0, 1, 2, \ldots$) определяются аналогичными равенствами.

Обозначив правые части системы (4) соответственно через $\Lambda_n^{(1)}$ и $\Lambda_n^{(2)}$, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{b_{0,1}^{(0)}\Lambda_n^{(1)} - a_{0,1}^{(0)}\Lambda_n^{(2)}}{\Delta}, \\ \beta_n &= \frac{a_{1,0}^{(0)}\Lambda_n^{(2)} - b_{1,0}^{(0)}\Lambda_n^{(1)}}{\Delta} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{5}$$

В комплексной плоскости z рассмотрим луч L, исходящий из начала координат и заданный уравнениями

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + iy(t), \qquad t \geqslant 0, \\ x(t) &= c_1 t, \\ y(t) &= c_2 t. \end{aligned} \tag{6}$$

Будем считать, что

$$a_{1,0}^{(0)} \neq 0, \qquad b_{0,1}^{(0)} \neq 0, \qquad a_{0,1}^{(0)} = b_{1,0}^{(0)} = 0.$$

Действительно, к такому виду матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{1,0}^{(0)} & a_{0,1}^{(0)} \\ b_{1,0}^{(0)} & b_{0,1}^{(0)} \end{Vmatrix}$$

всегда может быть приведена, если собственные числа этой матрицы λ_1 и λ_2 отличны от нуля. А в случае кратности корня $\lambda_1 = \lambda_2$ нужно дополнительно предположить, что степень элементарного делителя указанного корня равна единице.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Система* (1) *имеет хотя бы одно регулярное на луче* L *решение* $w_1 = w_1^{(0)}(z)$, $w_2 = w_2^{(0)}(z)$ *такое, что*

$$\lim_{z \to 0} w_1^{(0)}(z) = 0,$$
$$\lim_{z \to 0} w_2^{(0)}(z) = 0,$$

когда z *стремится к* 0 *вдоль любого луча* L, *определяемого равенствами* (6) *и условиями*

$$\begin{aligned} s_1 c_2 + p_1 c_1 &> 0, \\ s_2 c_2 + p_2 c_1 &> 0 \end{aligned} \tag{7}$$

или

$$\begin{aligned} s_1 c_2 + p_1 c_1 &< 0, \\ s_2 c_2 + p_2 c_1 &< 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где $p_1 + is_1 = a_{1,0}(0)$, $p_2 + is_2 = b_{0,1}(0)$. *Причем, выполняются равенства*

$$\lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\,[w_1^{(0)}(z)] = \alpha_1,$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\,[w_2^{(0)}(z)] = \beta_1.$$

Поясним основную идею доказательства сформулированной теоремы.

Рассмотрим вспомогательные полупространства (μ, ν, t) и (σ, τ, t) при $t \geqslant 0$.

Через любую точку, содержащую в конечной окрестности начала координат системы (μ, ν, t) или (σ, τ, t) и не совпадающую с $(0, 0, 0)$, проходит согласно теореме Коши единственная интегральная кривая системы (1), непрерывная в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Причем, в этой точке система (1) определяет направление касательных $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ к интегральным кривым. Составляющие этих векторов будут:

$$\overline{T}_1 \left\{ \operatorname{Re} \frac{dw_1}{dt}, \quad \operatorname{Im} \frac{dw_1}{dt}, \quad 1 \right\},$$

$$\overline{T}_2 \left\{ \operatorname{Re} \frac{dw_2}{dt}, \quad \operatorname{Im} \frac{dw_2}{dt}, \quad 1 \right\}.$$

Далее, в полупространствах (μ, ν, t) и (σ, τ, t) рассмотрим две конические поверхности:

$$[(q_1c_1 - r_1c_2)t + \mu]^2 + [(q_1c_2 + r_1c_1)t + \nu]^2 = r^2t^2 \qquad (K_1),$$

и

$$[(q_2c_1 - r_2c_2)t + \sigma]^2 + [(q_2c_2 + r_2c_1)t + \tau]^2 = r^2t^2 \qquad (K_2),$$

где r — постоянное число, а $q_1 + ir_1 = \dfrac{a_{0,0}^{(0)}}{a_{1,0}^{(0)}}$, $q_2 + ir_2 = \dfrac{b_{0,0}^{(0)}}{b_{0,1}^{(0)}}$.

Можно доказать, что существует достаточно малое число t_0, такое, что при $0 < t \leqslant t_0$ все интегральные кривые, пересекающие поверхности конусов (K_1) и (K_2), либо входят внутрь конусов, либо из них выходят при $t \to 0$. Такой вывод можно сделать в том случае, когда косинус угла между внешней нормалью $\overline{N}_1$ к конусу (K_1) и касательной $\overline{T}_1$ к соответствующей интегральной кривой сохраняет знак. Аналогично и для конуса (K_2).

Косинус угла между $\overline{N}_1$ и $\overline{T}_1$ определяется выражением

$$\cos(\overline{N}_1, \overline{T}_1) = \frac{(p_1c_1 + c_2s_1)\dfrac{r^2}{c_1^2 + c_2^2} + f_1(t)}{\sqrt{N_{1,\mu}^2 + N_{1,\nu}^2 + N_{1,t}^2}\sqrt{\left(\operatorname{Re}\dfrac{dw_1}{dt}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\dfrac{dw_1}{dt}\right)^2 + 1}},$$

где $f_1(t) = O(t^\lambda)$, $\lambda \geqslant 1$.

Аналогичную формулу получим и для косинуса угла между $\overline{N}_2$ и $\overline{T}_2$.

Отсюда следует, что при малых значениях t:

$$\text{знак } \cos(\overline{N}_1, \overline{T}_1) \text{ равен знаку } (s_1c_2 + p_1c_1),$$

$$\text{знак } \cos(\overline{N}_2, \overline{T}_2) \text{ равен знаку } (s_2c_2 + p_2c_1),$$

и если выполняются неравенства (7), то интегральные кривые входят в конус и в дальнейшем при $t \to 0$ проходят через точку $(0, 0, 0)$. Если же выполняются неравенства (8), то интегральные кривые, пересекая поверхность конусов, выходят из них.

Можно доказать, что при этом существует единственная интегральная кривая, проходящая через точку $(0, 0, 0)$.

Связь между формальными решениями системы (1), представленными в виде степенных рядов (2), и регулярными функциями $w_1^{(0)}(z)$ и $w_2^{(0)}(z)$ устанавливается в следующем виде.

1. При достаточно малых t на каждом луче L, удовлетворяющем условию (7), существует бесчисленное множество решений системы (1), регулярных на L при $0 < t < t_0$ и асимптотически представленных соответственно рядами (2).

2. Если же выполняются неравенства (8), то на каждом луче L, определенном условием (8), при $0 < t < t_0$ существует одно и только одно решение $w_1^{(0)}(z)$ и $w_2^{(0)}(z)$ системы (1), регулярное на L и асимптотически представимое рядами (2).

Каждая из систем неравенств (7) или (8) определяет на плоскости z сектор при малых t, раствор которого не больше π. Например, если

$$p_1 = \operatorname{Re} a_{1,0}^{(0)} > 0, \qquad p_2 = \operatorname{Re} b_{0,1}^{(0)} > 0,$$

$$s_1 = \operatorname{Im} a_{1,0}^{(0)} = 0, \qquad s_2 = \operatorname{Im} b_{0,1}^{(0)} = 0,$$

то условия (7) определяют при малых t полукруг в правой полуплоскости, а условия (8) — полукруг в левой полуплоскости.

Исключается из рассмотрения случай, когда одновременно

$$\text{знак } p_1 \neq \text{ знаку } p_2, \text{ знак } s_2 \neq \text{ знаку } s_1.$$

Сформулированные результаты могут быть обобщены на случай системы n уравнений аналогичного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Poincaré, Acta Math., 8, 1886, 295—344.
2. J. Bendixon, 24, 1901.
3. Д. П. Костомаров, ДАН СССР, т. 110, № 6, 1956.
4. М. Г. Миракьян, О порядке роста коэффициентов формальных решений одного класса дифференциальных уравнений, Научн. зап. Одесск. политехн. ин-та, т. 46, 1962.
5. Л. В. Чепурной, Про асимптотичну поведінку розв'язків одного класу звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку, Праці ОДУ, т. 151, 1961.

Поступила 3.X 1962 г.
Одесса