Спектральный анализ вольтерровских операторов, заданных в пространстве вектор-функции $L_m^2\ [0, l]$

Л. А. Сахнович

В работе [1] рассматривался вопрос о приведении к простейшему виду оператора

$$Kf = \int_0^x f(t)K(x, t)\,dt,$$

где $K(x, t)$ — матрица-функция, а $f(t)$ — вектор-функция. При этом предполагалось, что ядро $K(x, t)$ имеет определенную структуру. Полученные результаты использовались для доказательства теорем единственности в теории обратных задач для систем дифференциальных уравнений. В настоящей статье результаты работы [1] получаются при значительно меньших ограничениях на ядро оператора $K(x, t)$.

Доказывается также новая теорема (теорема 2), которая, как нам кажется, существенно помогает при исследовании систем дифференциальных уравнений соответствующего вида.

Теорема 1. *Пусть дан оператор*

$$Kf = \int_0^x f(t)\,K(x, t)\,dt, \quad f(t) \in L_m^2[0, l], \tag{1}$$

где матрица $K(x, t)$ *удовлетворяет условиям:*

1) смешанная производная $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} K(x, t)$ *ограничена по норме:*

2) $$K(x, x) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = j \ (p + q = m,\ p < \infty).$$

Тогда оператор K линейно-эквивалентен оператору

$$(Jf)\,j = \int_0^x f(t)\,dt\,j \quad f(t) \in L_m^2[0, l].$$

Доказательство. Пусть $f(x)\,\{f(x),\quad f'(x) \in L_m\,[0, l]\}$ — некоторая вектор-функция, а $g(x, \lambda) = (I - \lambda K)^{-1}\,f$, тогда

$$g(x, \lambda) - \lambda \int_0^x g(t, \lambda)\,K(x, t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Продифференцируем обе части этого равенства:

$$\frac{dg}{dx} - \lambda g j - \lambda \int_0^x g(t, \lambda)\,\frac{\partial}{\partial x}\,K(x, t)\,dt = \frac{df}{dx}.$$

Применяя к обеим частям последнего соотношения оператор

$$(I+H)f = f(x) + \int_0^x f(t)\,H(x,t)\,dt,$$

обратный к оператору

$$(I+K_1)f = f(x) + \int_0^x f(t)\,f\,\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)\,dt,$$

получаем

$$\frac{dg}{dx} + \int_0^x \frac{dg}{dt}\,H(x,t)\,dt - \lambda g j = \psi, \tag{3}$$

где $\psi(x) = (I+H)\dfrac{df}{dx}$. Отсюда, интегрируя по частям, найдем

$$\frac{dg}{dx} - g(x,\lambda)\,H(x) - \int_0^x g(t,\lambda)\,H_1(x,t)\,dt - \lambda g j = s(x),$$

где

$$H(x) = -H(x,x), \quad H_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}H(x,t), \quad s(x) = \psi(x) + g(0)\,H(x,0).$$

Выберем теперь систему вектор-функций $f_1^0, f_2^0, \ldots, f_m^0$ так, чтобы

$$\frac{df_k^0}{dx} = -(I+H)^{-1}[e_k H(x,0)],$$

где

$$f_k^0(0) = e_k = [\overbrace{0,\ldots,0}^{k-1}, 1, 0, \ldots, 0].$$

Тогда соответствующие им вектор-функции

$$g_k = (I-\lambda K)^{-1} f_k^0$$

удовлетворяют начальным условиям $g_k(0) = e_k$, а функции $s_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$ тождественно равны нулю.

Составленная из векторов $g_k(x,\lambda)$ матрица $G(x,\lambda) = \|g_{k,n}\|_{k,n=1}^m$ является, очевидно, решением интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dG}{dx} - GH(x) - \lambda G j - \int_0^x G(t,\lambda)\,H_1(x,t)\,dt = 0 \tag{4}$$

и удовлетворяет начальному условию

$$G(0,\lambda) = I,$$

т. е. является фундаментальной матрицей уравнения (4).

Разбивая матрицу $H(x)$ на блоки соответственно матрице j:

$$H(x) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \;\;p\;\; & \;\;q\;\; \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc} H_{11}(x) & H_{12}(x) \\ H_{21}(x) & H_{22}(x) \end{array}\right| \begin{array}{l} \}p \\ \}q \end{array} \end{array},$$

представим матрицу $H(x)$ в виде суммы: $H(x) = H_1(x) + H_2(x)$, где

$$H_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & H_{12}(x) \\ H_{21}(x) & 0 \end{bmatrix}, \qquad H_2(x) = \begin{bmatrix} H_{11}(x) & 0 \\ 0 & H_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4) при этом примет вид

$$\frac{dG}{dx} - GH_1(x) - GH_2(x) - \lambda Gj - \int\limits_0^x G(t, \lambda) H_1(x, t)\, dt = 0.$$

Избавимся от члена $GH_2(x)$ с помощью следующей замены

$$G(x, \lambda) = G_1(x, \lambda)\, w(x),$$

выбирая матрицу $w(x)$ так, чтобы

$$\frac{dw}{dx} = wH_2(x), \quad w(0) = I.$$

Заметим, что матрица $w(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) & 0 \\ 0 & w_2(x) \end{bmatrix}$ имеет ограниченную обратную:

$$w^{-1}(x) = \begin{bmatrix} w_1^{-1}(x) & 0 \\ 0 & w_2^{-1}(x) \end{bmatrix} = e^{-\int\limits_0^{\overleftarrow{x}} H_2(t)dt}.$$

Обозначая, наконец,

$$\begin{gathered} w(x) \cdot H_1(x)\, w^{-1}(x) = R(x) = \begin{bmatrix} 0 & R_1(x) \\ R_2(x) & 0 \end{bmatrix}, \\ w(t)\, H_1(x, t)\, w^{-1}(x) = L(x, t), \end{gathered} \tag{5}$$

получим, что матрица-функция $G_1(x, \lambda)$ является решением интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dG_1}{dx} - G_1 R(x) - \lambda G_1 j - \int\limits_0^x G_1(t, \lambda)\, L(x, t)\, dt = 0 \tag{6}$$

и удовлетворяет начальному условию

$$G_1(0, \lambda) = I.$$

Займемся теперь построением аналога оператора преобразования. Пользуясь методом последовательных приближений, запишем решение уравнения (6) в виде формального ряда:

$$G_1(x, \lambda) = e^{\lambda xj} + \varphi_1(x, \lambda) + \varphi_2(x, \lambda) + \ldots, \tag{7}$$

где

$$\varphi_n(x, \lambda) = \int\limits_0^x \Big[\varphi_{n-1}(t, \lambda)\, R(t) + \int\limits_0^t \varphi_{n-1}(s, \lambda)\, L(t, s)\, ds \Big] e^{\lambda j(x-t)}\, dt,$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots; \quad \varphi_0(x, \lambda) = e^{\lambda xj}.$$

Докажем, что матрицы-функции $\varphi_n(x, \lambda)$ могут быть представлены в виде

$$\varphi_n(x, \lambda) = \int\limits_{-x}^x e^{\lambda t} N_n(x, t)\, dt \tag{8}$$

и что ряд (7) равномерно сходится на сегменте $[0, l]$.

Действительно,

$$\varphi_1(x,\lambda) = \int_0^x \left[e^{\lambda tJ} R(t) + \int_0^t e^{\lambda sJ} L(t,s)\,ds\right] e^{\lambda(x-t)J}\,dt =$$

$$= \int_0^x \left\{ \begin{bmatrix} e^{\lambda t} I_p & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} I_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & R_1(t) \\ R_2(t) & 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\lambda s} I_p & 0 \\ 0 & e^{-\lambda s} I_q \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{bmatrix} L_{11}(t,s) & L_{12}(t,s) \\ L_{21}(t,s) & L_{22}(t,s) \end{bmatrix} ds \right\} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda(x-t)} & I_p & 0 \\ 0 & e^{-\lambda(x-t)} & I_q \end{bmatrix} dt.$$

Выполняя здесь замену переменной свою в каждом блоке и меняя порядок интегрирования, найдем:

$$\varphi_1(x,\lambda) = \int_{-x}^{x} e^{\lambda t} N_1(x,t)\,dt;$$

при этом

$$N_1(x,t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & R_1\left(\dfrac{x+t}{2}\right) \\ R_1\left(\dfrac{x-t}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{11}(x,t) & M_{12}(x,t) \\ M_{21}(x,t) & M_{22}(x,t) \end{bmatrix},$$

где

$$M_{11}(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{x-t}^{x} L_{11}(s, s+t-x)\,ds, & t \geqslant 0, \\ 0, & t \leqslant 0; \end{cases}$$

$$M_{22}(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{x+t}^{x} L_{22}(s, s+t-x)\,ds, & t \leqslant 0, \\ 0, & t \geqslant 0; \end{cases} \tag{9}$$

$$M_{12}(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{x+t}{2}}^{x} L_{12}(s, x-s+t)\,ds, & t \geqslant 0, \\ \displaystyle\int_{\frac{x+t}{2}}^{x+t} L_{12}(s, x-s+t)\,ds, & t \leqslant 0; \end{cases}$$

$$M_{21}(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{x-t}{2}}^{x-t} L_{21}(s, x-s-t)\,ds, & t \geqslant 0, \\ \displaystyle\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} L_{21}(s, x-s-t)\,ds, & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Предполагая теперь формулу (8) справедливой для φ_{n-1}, докажем, что она остается верной и для φ_n.

Итак, пусть

$$\varphi_n(x,\lambda) = \int_0^x \left\{ \int_{-t}^{t} e^{\lambda s} N_{n-1}(t,s)\,ds R(t) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_{-s}^{s} e^{\lambda v} N_{n-1}(s,v)\,dv L(t,s)\,ds \right\} e^{\lambda(x-t)J} dt. \tag{10}$$

Введем для краткости записи следующие обозначения:

$$j_p = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad j_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

Совершая в правой части (10) очевидные замены переменной и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\varphi_n(x, \lambda) = \int_{-x}^{x} e^{\lambda t} N_n(x, t)\, dt,$$

где

$$N_n(x, t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} N_{n-1}(u, u+t-x) R(u) j_p du + \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} N_{n-1}(u, t+x-$$

$$-u) R(u) j_q du + \int_{\frac{x-t}{2}}^{x-t} \int_{0}^{x-t-u} N_{n-1}(s, u+t-x) L(u, s) j_p ds du +$$

$$+ \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} \int_{0}^{x+t-u} N_{n-1}(s, x+t-u) L(u, s) j_q ds du \tag{11}$$

при $t \geqslant 0$,

$$N_n(x, t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} N_{n-1}(u, u+t-x) R(u) j_p du + \int_{\frac{x+t}{2}}^{x} N_{n-1}(u, x+t-$$

$$-u) R(u) j_q du + \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{0}^{x-t-u} N_{n-1}(s, u+t-x) L(u, s) j_p ds du +$$

$$+ \int_{\frac{x+t}{2}}^{x+t} \int_{0}^{x+t-u} N_{n-1}(s, x+t-u) L(u, s) j_q ds du \tag{12}$$

при $t \leqslant 0$.

Таким образом, возможность представления (8) доказана.

Оценим теперь функции $N_n(x, t)$. Из (9) вытекает неравенство

$$\| N_1(x, t) \| \leqslant C. \tag{13}$$

Обозначая теперь

$$\sup \{\| R(u) \|, \; \| L(u, s) \|\} = M, \quad 0 \leqslant u, s \leqslant l,$$

без труда найдем следующую оценку:

$$\| N_n(x, t) \| \leqslant \frac{C(2M)^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} (1+l)^{n-1}. \tag{14}$$

Таким образом, ряд $N_1(x, t) + N_2(x, t) + \ldots$ равномерно сходится на сегменте $[0, l]$ к некоторой ограниченной матрице-функции $N(x, t)$, а значит, равномерно сходится и ряд

$$e^{\lambda x j} + \varphi_1(x, \lambda) + \varphi_2(x, \lambda) + \ldots = e^{\lambda x j} + \int_{-x}^{x} e^{\lambda t} N(x, t)\, dt = G_1(x, \lambda).$$

Тем самым доказано представление

$$G(x, \lambda) = G_1(x, \lambda)\, w(x) = \left[e^{\lambda x j} + \int_{-x}^{x} e^{\lambda t} N(x, t)\, dt\right] w(x). \tag{15}$$

В соответствии с (15) введем оператор преобразования T, действующий из $L^2_m[-l, l]$ в $L^2_m[0, l]$ и определенный формулой

$$Tf = \left[f(x)\, j_p + f(-x)\, j_q + \int_{-x}^{x} f(t)\, N(x, t)\, dt\right] w(x). \tag{16}$$

Очевидно, оператор T переводит строки матрицы $e^{\lambda x}I$ в соответствующие строки матрицы $G(x, \lambda)$ и соотношение (15) может быть записано теперь в операторной форме:

$$(I - \lambda K)^{-1} f_k^0 = T(I - \lambda J)^{-1} e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad e_k = [\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0, \ldots, 0], \tag{17}$$

причем оператор

$$If = \int_0^x f(t)\, dt$$

рассматривается сейчас в пространстве $L^2_m[-l, l]$.

Разлагая в ряд по степеням λ обе части (17) и приравнивая соответствующие коэффициенты, найдем

$$K^n f_k^0 = TJ^n e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

В частности, при $n = 0$ получаем $f_k^0 = Te_k$ и, следовательно,

$$K^n T l_k = TJ^n e_k.$$

Легко видеть, что линейные комбинации векторов $g_{n,k} = J^n e_k$ образуют в $L^2_m[-l, l]$ плотное множество, и так как $KTg_{n,k} = TJg_{n,k}$, то

$$KT = TJ. \tag{18}$$

Подчеркнем еще раз, что оператор J здесь определен в пространстве $L^2_m[-l, l]$, оператор K — в пространстве $L^2_m[0, l]$, а оператор T действует из $L^2_m[-l, l]$ в $L^2_m[0, l]$.

Из равенства (18) нельзя сделать вывод о линейной эквивалентности операторов K и J ввиду того, что оператор T, как видно из дальнейшего, не имеет обратного, переводя некоторые векторы из $L^2_m[-l, l]$ в нуль.

Для того чтобы получить оператор, имеющий ограниченный обратный, рассмотрим подпространство $H_{p,q}$ ($H_{p,q} \subset L^2_m[-l, l]$) векторов вида

$$f(x) = [f_1(x), \quad f_2(x), \ldots, \quad f_m(x)], \quad -l \leqslant x \leqslant l,$$

где $f_k(x) \equiv 0$ при $x < 0$ и $k = 1, 2, \ldots, p$, $f_k(x) \equiv 0$ при $x > 0$ и $k = p + 1$, $p + 2, \ldots, m$.

В силу этого определения, каждый вектор $f \in H_{p,q}$ представляется в виде

$$f(x) = f(x)\, j_p + f(x)\, j_q,$$

где первое слагаемое

$$f(x)\, j_p = [f_1(x), \ldots, f_p(x), 0, \ldots, 0]$$

равно тождественно нулю в промежутке $(-l, 0)$, а второе — в промежутке $(0, l)$.

Определим на векторах пространства $H_{p,\,q}$ оператор

$$U_0 f = f(x)\, j_p + f(-x)\, j_q ,$$

отображающий $H_{p,\,q}$ изометрично и взаимно-однозначно на $L^2_m[0,\ l]$.

Рассмотрим теперь в пространстве $L^2_m[0,\ l]$ оператор

$$J_1 f = \int_0^x f(t)\, dt j .$$

Легко видеть, что $U_0^{-1} J_1 U_0$ на пространстве $H_{p,\,q}$ совпадает с J. Равенство (18) для векторов $f \in H_{p,\,q}$ примет вид

$$KTf = TU_0^{-1} J_1 U_0 f$$

или

$$KT_1 g = T_1 J_1 g , \quad g \in L^2_m[0,\ l], \tag{19}$$

где оператор T_1 отображает $L^2_m[0,\ l]$ на $L^2_m[0,\ l]$ и определен формулой

$$T_1 g = TU_0^{-1} g = [g(x) + \int_0^x g(t)\, j_p N(x,\ t)\, dt + \int_0^x g(t)\, j_q N(x,\ -t)]\, w(x) =$$

$$= g(x)\, w(x) + \int_0^x g(t)\, N_1(x,\ t)\, dt . \tag{20}$$

Здесь первые p строк матрицы $N_1(x,\ t)$ совпадают с соответствующими строками $N(x,\ t)\, w(x)$, а остальные—с соответствующими строками $N(x,\ -t)\, w(x)$.

Так как оператор T_1 имеет, очевидно, ограниченный обратный

$$T_1^{-1} g = g(x)\, w^{-1}(x) + \int_0^x g(t)\, U(x,\ t)\, dt , \tag{21}$$

то из (19) вытекает равенство $K = T_1 J_1 T_1^{-1}$; отсюда и получаем утверждение теоремы.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство оператора преобразования.

Лемма. *Пусть оператор K удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда соответствующий оператор преобразования T_1 и обратный к нему T_1^{-1} переводят дифференцируемые функции в дифференцируемые.*

Доказательство. Для доказательства справедливости этого утверждения воспользуемся равенством

$$KT_1 = T_1 J_1 . \tag{22}$$

Пусть сначала $f(0) = 0$ и $\dfrac{df}{dx} j = f_1(x) \in L^2_m[0,\ l]$, тогда $f(x) = J_1 f_1$ и

$$g = T_1 f = T_1 J_1 f_1 = KT_1 f_1 .$$

Так как оператор K, удовлетворяющий условиям теоремы 1, переводит все функции пространства $L^2_m[0,\ l]$ в дифференцируемые, то $g(x)$ является дифференцируемой функцией. Остается доказать лемму для произвольной дифференцируемой функции

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f_1(t)\, dt j .$$

Очевидно, достаточно убедиться в справедливости ее для постоянных функций $f = h = [h_1, h_2, \ldots, h_m]$.

Рассматривая ядра операторов K, T_1, J_1, получим из (22) и (20) соотношение

$$w(t) K(x, t) + \int_t^x K(x, s) N_1(s, t)\, ds = jw(x) + \int_t^x N_1(x, s)\, j ds,$$

принимающее при $t = 0$ вид

$$K(x, 0) + \int_0^x K(x, s) N_1(s, 0)\, ds = jw(x) + \int_0^x N_1(x, s)\, j ds = T_1(I)\, j.$$

Так как левая часть данного соотношения дифференцируема, то дифференцируема и его правая часть, т. е. оператор T_1 переводит строки единичной матрицы в дифференцируемые функции.

Следовательно, любую постоянную функцию оператор T_1 переводит в дифференцируемую. Для оператора T_1 высказанное утверждение доказано. Аналогично оно доказывается для оператора T_1^{-1}.

Замечание. Из доказательства леммы вытекает, что оператор T_1 переводит матрицу $F(x)$, производная которой ограничена по матричной норме, в матрицу $G(x) = T_1\, F(x)$, также имеющую производную, ограниченную по матричной норме*.

Оператор преобразования T (см. (15)), построенный в теореме 1, переводил строки матрицы $e^{\lambda x} I$ в строки матрицы $G(x, \lambda)$, где $G(x, \lambda)$—решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dG}{dx} - GH(x) - \lambda Gj - \int_0^x G(t, \lambda) H_1(x, t)\, dt = 0 \tag{23}$$

и

$$G(0, \lambda) = I.$$

Ввиду того что оператор T не имел обратного, для доказательства теоремы пришлось заменить его оператором T_1, имеющим ограниченный обратный. При этом T_1 приводил вольтерровский оператор K к простейшему виду:

$$K = T_1 J_1 T^{-1}.$$

Оператор T_1 переводит, однако, решения простейшего уравнения

$$\frac{d\omega}{dx} - \lambda\omega j = 0 \tag{24}$$

в решения интегро-дифференциального уравнения (23) с некоторой правой частью, вообще говоря, отличной от нуля.

Для того чтобы построить оператор преобразования, свободный от указанных недостатков, рассмотрим оператор

$$S = T_1(I + M),$$

где

$$(I + M) f = f(x) + \int_0^x f(t) \begin{bmatrix} M_1(x - t) & 0 \\ 0 & M_2(x - t) \end{bmatrix} dt,$$

$M_1(x)$, $M_2(x)$ — неопределенные пока квадратные матрицы соответственно p-го и q-го порядков.

* Равенство $G(x) = T_1 F(x)$ следует понимать так: каждая строка матрицы $G(x)$ является результатом применения оператора T_1 к соответствующей строке матрицы $F(x)$.

Так как оператор $(I+M)$ перестановочен с J_1, то S также является оператором преобразования, т. е. $K=SJ_1S^{-1}$.

Завершим построение оператора преобразования, доказав для случая $p=q$ следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть в уравнении*

$$\frac{dG}{dx}-GH(x)-\lambda Gj-\int_0^x G(t,\ \lambda)H_1(x,\ t)\,dt=0 \tag{25}$$

матрицы $H(x)$ и $H_1(x,\ t)$ ограничены по матричной норме и $p=q$. Тогда существует один и только один оператор преобразования S, переводящий решение уравнения (24) $\omega(x,\ \lambda)$ в решение $G(x,\ \lambda)$ уравнения (25), при этом $\omega(x,\ \lambda)$ и $G(x,\ \lambda)$ — прямоугольные матрицы, состоящие из p строк и

$$\omega(0,\ \lambda)=G(0,\ \lambda)=[I_p,\ I_p]=\varepsilon\,.$$

Доказательство. Аналогично тому, как это делалось в работе [2], подберем оператор $(I+M)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$G(x,\ 0)=S\varepsilon\,.$$

Последнее равенство может быть записано в виде

$$(I+M)\,\varepsilon=T_1^{-1}G(x,\ 0)=G(x,\ 0)\,w^{-1}(x)+\int_0^x G(t,\ 0)\,U(x,\ t)\,dt\,,$$

т. е.

$$\varepsilon+\int_0^x [M_1(u),\ M_2(u)]\,du=G(x,\ 0)\,w^{-1}(x)+\int_0^x G(t,\ 0)\,U(x,\ t)\,dt\,.$$

В силу замечания к лемме, правая часть этого равенства имеет ограниченную по матричной норме производную. Выполнив дифференцирование, мы найдем такие $M_1(x)$ и $M_2(x)$, что соответствующий оператор S будет переводить ε в $G(x,\ 0)$:

$$G(x,\ 0)=S\varepsilon\,.$$

Применим теперь к обеим частям этого равенства резольвенту оператора K:

$$(I-\lambda K)^{-1}G(x,\ 0)=(I-\lambda K)^{-1}S\varepsilon=S(I-\lambda J_1)^{-1}\varepsilon=S\omega(x,\ \lambda)\,.$$

Так же, как в теореме 1, можно показать, что при определенном выборе прямоугольной матрицы $F(x)$ матрица $G(x,\ \lambda)$ представляется в виде

$$G(x,\ \lambda)=(I-\lambda K)^{-1}F(x)\,. \tag{26}$$

Полагая здесь $\lambda=0$, получим $G(x,\ 0)=F(x)$, откуда и вытекает окончательная формула

$$G(x,\ \lambda)=S\omega(x,\ \lambda)\,. \tag{27}$$

Для доказательства единственности оператора S заметим, что из

$$S_1\omega(x,\ \lambda)=G(x,\ \lambda)\,,$$

$$S_2\omega(x,\ \lambda)=G(x,\ \lambda)$$

вытекает, что $S_1=S_2$, так как строки матрицы $\omega(x,\ \lambda)$ образуют замкнутую систему векторов в $L_m^2[0,\ l]$.

Действительно, если вектор

$$g(x) = [g_1(x), \ldots, g_m(x)]$$

ортогонален ко всем строкам матрицы $\omega(x, \lambda)$, то

$$\int_0^l [e^{\lambda t}\overline{g_r(t)} + e^{-\lambda t}\overline{g_{r+p}(t)}]\, dt = 0 \quad r = 1,2, \ldots p;$$

отсюда без труда получаем:

$$g_r(x) \equiv g_{r+p}(x) \equiv 0, \quad r = 1,2, \ldots, p.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Сахнович, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 21, № 7, 1958.
2. Л. А. Сахнович, Матем. сб. т. 46, вып. 1, 1958.

Поступила 20.IV 1960 г.
Одесса