Программные квазилинейные колебательные процессы

П. М. Сеник

В настоящей статье решается задача о выборе системы управляющих параметров, обеспечивающих колебания объекта с заданым изменением мгновенной амплитуды и частоты.

Рассматриваемая в статье задача относится к задачам программных процессов.

1. Постановка задачи. Требуется найти управляющие параметры $b_r (r = 1, \ldots, m)$ так, чтобы колебательный процесс объекта, описываемый системой дифференциальных уравнений

$$\dot{y} + \omega x = \sum_{r=1}^{m} F_r(x, y)\, b_r\,,$$

$$\dot{x} - \omega y = 0\,, \tag{1.1}$$

на интервале времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_N < \infty$ протекал с заданной мгновенной амплитудой и частотой

$$a = \gamma(\tau)\,, \quad \Omega = \omega + \varepsilon\lambda(\tau)\,, \tag{1.2}$$

а интеграл

$$I = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N} \{[x - au]^2 + [y - av]^2\}\, d\tau \tag{1.3}$$

принимал малое значение.

Здесь $F_r(x, y)$ — линейно независимые функции, удовлетворяющие условию $F_r(-x, -y) = -F_r(x, y)$, ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, $\gamma(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ — непрерывные функции на интервале $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_N$, функции $u(\psi)$ и $v(\psi)$ являются решением системы

$$v'_\psi + u = 0\,, \quad u'_\psi - v = 0 \tag{1.4}$$

и удовлетворяют условиям

$$u(\psi)|_{\psi=\pi k} = (-1)^k\,, \quad v(\psi)|_{\psi=\pi k} = 0 \;\; (k = 0, 1, \ldots, N)\,. \tag{1.5}$$

Предполагается, что полная фаза колебаний ψ, определяемая из второго соотношения в (1.2), удовлетворяет условию

$$\psi(\tau, \varepsilon)\big|_{\tau=\tau_k} = \pi k \, (k = 0, 1, \ldots, N). \tag{1.6}$$

Условие, наложенное на интеграл (1.3), который характеризует среднеквадратическое отклонение между фазовыми траекториями $x(\tau, \varepsilon)$ и $y(\tau, \varepsilon)$, с одной стороны, и $a(\tau)$ u (ψ) и $a(\tau)v(\psi)$ с другой, служит критерием близости неизвестных траекторий к известным и практически осуществимым.

2. Решение задачи. Колебательный процесс, фазовые координаты которого удовлетворяют условию (1.3), а мгновенная амплитуда и частоты изменяются по закону (1.2), назовем квазилинейным.

Если система дифференциальных уравнений квазилинейна, то, как следует из теории асимптотических методов [1], колебательный процесс будет квазилинейным.

Чтобы система (1.1) описывала заданный квазилинейный колебательный процесс, необходимо, чтобы она была квазилинейной, а это будет тогда, когда неизвестные величины b_r будут зависеть от малого параметра ε, и при $\varepsilon = 0$ $b_r = 0$.

Учитывая сказанное, будем искать управляющие параметры в виде разложения

$$b_r = \varepsilon b_r^{(1)} + \varepsilon^2 b_r^{(2)} + \ldots. \tag{2.1}$$

Введем, учитывая условие (1.3), в систему (1.1) новые переменные по формулам

$$\begin{gathered} x = a(\tau)\, u(\psi) + U(\tau, \psi, \varepsilon), \\ y = a(\tau)\, v(\psi) + V(\tau, \psi, \varepsilon). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Новые переменные в (2.2) будем искать в виде разложения

$$\begin{gathered} U(\tau, \psi, \varepsilon) = \varepsilon U_1(\tau, \psi) + \varepsilon^2 U_2(\tau, \psi) + \ldots, \\ V(\tau, \psi, \varepsilon) = \varepsilon V_1(\tau, \psi) + \varepsilon^2 V_2(\tau, \psi) + \ldots, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $U_n(\tau, \psi)$ и $V_n(\tau, \psi) (n = 1, 2, \ldots)$ — периодические функции относительно ψ периода 2π.

Разложения (2.1) и (2.3), как и в [1], носят чисто формальный смысл и служат методом для приближенного определения управляющих параметров. Из-за постепенного усложнения формул можно найти лишь конечное число членов в этих разложениях.

Для того чтобы величина a была максимумом (минимумом) переменной $x(\tau, \psi, \varepsilon)$ при $\psi = \pi k$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$, нужно чтобы, согласно (1.5), (2.2) и (2.3), а также второму уравнению в (1.1), функции $U_n(\tau, \psi)$ и $V_n(\tau, \psi)$ удовлетворяли условию

$$U_n(\tau, \psi)\big|_{\psi=\pi k} = V_n(\tau, \psi)\big|_{\psi=\pi k} = 0. \tag{2.4}$$

Эти функции согласно (1.1), (1.2), (1.4), (2.1) и (2.2) определяются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial V_n(\tau, \psi)}{\partial \psi} + U_n(\tau, \psi) = \frac{1}{\omega}\left\{ \sum_{r=1}^{m} F_r(\tau, \psi)\, b_r^{(n)} - \right. \\ \left. - \alpha_n(\tau, \psi)\, u(\psi) + \beta_n(\tau, \psi)\, v(\psi) \right\}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial U_n(\tau, \psi)}{\partial \psi} - V_n(\tau, \psi) = \frac{-1}{\omega}\left\{\alpha_n(\tau, \psi)\, v(\psi) + \beta_n(\tau, \psi)\, u(\psi)\right\},$$

где $\alpha_n(\tau, \psi)$ и $\beta_n(\tau, \psi)$ — известные функции, периодические относительно ψ периода π.

Решение системы (2.5) будем искать в виде

$$U_n(\tau, \psi) = u(\psi) C_n^{(1)}(\tau, \psi) + v(\psi) C_n^{(2)}(\tau, \psi),$$
$$V_n(\tau, \psi) = v(\psi) C_n^{(1)}(\tau, \psi) - u(\psi) C_n^{(2)}(\tau, \psi), \tag{2.6}$$

где $C_n^{(1)}(\tau, \psi)$ и $C_n^{(2)}(\tau, \psi)$ — неизвестные функции, которые, как следует из (1.5) и (2.4), должны удовлетворять условию

$$C_n^{(1)}(\tau, \psi)\big|_{\psi=\pi k} = C_n^{(2)}(\tau, \psi)\big|_{\psi=\pi k} = 0. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.6) в (2.5), находим

$$C_n^{(1)}(\tau, \psi) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\psi}\left\{v(\varphi)\sum_{r=1}^{m} F_r(\tau, \varphi)\, b_r^{(n)} - \alpha_n(\tau, \varphi)\right\} d\varphi,$$
$$C_n^{(2)}(\tau, \psi) = \frac{-1}{\omega}\int\limits_0^{\psi}\left\{u(\varphi)\sum_{r=1}^{m} F_r(\tau, \varphi)\, b_r^{(n)} + \beta_n(\tau, \varphi)\right\} d\varphi. \tag{2.8}$$

Подынтегральные функции в (2.8) периодические относительно φ периода π. Тогда условия (2.7) будут выполняться, если правые части в (2.8) удовлетворяют условию

$$\sum_{r=1}^{m} \bar{f}_r(\tau)\, b_r^{(n)} - \bar{\alpha}_n(\tau) = 0,$$
$$\sum_{r=1}^{m} \bar{\bar{f}}_r(\tau)\, b_r^{(n)} - \bar{\beta}_n(\tau) = 0, \tag{2.9}$$

где обозначено

$$\bar{f}_r(\tau) = \int\limits_0^{\pi} v(\varphi) F_r(\tau, \varphi)\, d\varphi, \quad \bar{\bar{f}}_r(\tau) = \int\limits_0^{\pi} u(\varphi) F_r(\tau, \varphi)\, d\varphi.$$

$$\bar{\alpha}_n(\tau) = \int\limits_0^{\pi} \alpha_n(\tau, \varphi)\, d\varphi, \quad \bar{\beta}_n(\tau) = -\int\limits_0^{\pi} \beta_n(\tau, \varphi)\, d\varphi.$$

Теперь рассмотрим интеграл (1.3).

Т е о р е м а. *Имеет место неравенство*

$$I \leqslant \frac{\pi N^2 M}{\omega^2}\sum_{n=1}^{M} \varepsilon^{2n} I_n, \tag{2.10}$$

где обозначено

$$I_n = \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N}\int\limits_0^{\pi}\left\{\left[v(\psi)\sum_{r=1}^{m} F_r(\tau, \psi)\, b_r^{(n)} - \alpha_n(\tau, \psi)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + u(\psi)\left[\sum_{r=1}^{m} F_r(\tau, \psi)\, b_r^{(n)} + \beta_n(\tau, \psi)\right]^2\right\} d\tau d\psi. \tag{2.11}$$

Доказательство. Интеграл (1.3) согласно (2.2) и (2.3) примет вид

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_N} \left\{ \left[\sum_{n=1}^{M} \varepsilon^n U_n(\tau, \psi) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{M} \varepsilon^n V_n(\tau, \psi) \right]^2 \right\} d\tau .$$

Используя неравенство между средним арифметическим нескольких чисел и средним квадратическим этих же чисел, получаем

$$I \leqslant M \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^{2n} \int_{\tau_0}^{\tau_N} \{U_n^2 + V_n^2\} \, d\tau . \tag{2.12}$$

Подставляя в правую часть неравенства (2.12) соотношения (2.6), имеем

$$I \leqslant M \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^{2n} \int_{\tau_0}^{\tau_N} \{[C_n^{(1)}]^2 + [C_n^{(1)}]^2\} \, d\tau . \tag{2.13}$$

Учитывая (2.8), неравенство (2.13) можно переписать в виде

$$I \leqslant \frac{M}{\omega^2} \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^{2n} \int_{\tau_0}^{\tau_N} \left\{ \left[\int_0^{\psi} \Phi_n^{(1)}(\tau, \varphi) \, d\varphi \right]^2 + \left[\int_0^{\psi} \Phi_n^{(2)}(\tau, \varphi) \, d\varphi \right]^2 \right\} d\tau , \tag{2.14}$$

где величинами $\Phi_n^{(1)}(\tau, \varphi)$ и $\Phi_n^{(2)}(\tau, \varphi)$ обозначены соответственные подынтегральные функции в (2.8). В правой части (2.14) к квадратным скобкам применим неравенство Буняковского; получаем

$$I \leqslant \frac{M}{\omega^2} \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^{2n} \int_{\tau_0}^{\tau_N} \psi(\tau, \varepsilon) \int_0^{\psi(\tau, \varepsilon)} \{[\Phi_n^{(1)}(\tau, \varphi)]^2 + [\Phi_n^{(2)}(\tau, \varphi)]^2\} \, d\varphi d\tau . \tag{2.15}$$

Функция, которая стоит под первым интегралом в (2.15), положительная при любом значении параметра τ. Тогда, если в этой функции увеличить переменную ψ до πN, неравенство (2.15) только усилится. Имеем

$$I \leqslant \frac{\pi M N}{\omega^2} \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^{2n} \int_{\tau_0}^{\tau_N} \int_0^{\pi N} \{[\Phi_n^{(1)}(\tau, \varphi)]^2 + [\Phi_n^{(2)}(\tau, \varphi]^2\} \, d\varphi d\tau . \tag{2.16}$$

Функции $\Phi_n^{(1)}(\tau, \varphi)$ и $\Phi_n^{(2)}(\tau, \varphi)$ периодические относительно φ периода π. Неравенство (2.16) примет вид

$$I \leqslant \frac{\pi N^2 M}{\omega^2} \sum_{n=1}^{M} \varepsilon^{2n} \int_{\tau_0}^{\tau_N} \int_0^{\pi} \{[\Phi_n^{(1)}]^2 + [\Phi_n^{(2)}]^2\} \, d\varphi d\tau ,$$

что и требовалось доказать.

Интеграл (1.3), как явствует из (2.10), будет принимать малое значение, если N конечное, а интеграл (2.11) принимает минимальное значение.

Итак, коэффициенты b_r^n ($r = 1, \ldots, m$; $n = 1, 2, \ldots, M$) нужно определить так, чтобы они удовлетворяли условиям (2.9), а интеграл (2.11) принимал минимальное значение. Однако поскольку величины b_r^n постоянные, нельзя их подобрать так, чтобы точно удовлетворить условиям (2.9). Эти условия можно точно удовлетворить, если искать b_r^n как функции τ, т. е. как управляющие функции. Эта задача будет решаться в следующей работе.

Для управляющих параметров рассмотрим два случая.

Случай I. Рассматривая функции $a(\tau)u(\psi)$ и $a(\tau)v(\psi)$ как заданные фазовые траектории, найдем управляющие параметры b_r так, чтобы с наименьшей ошибкой приблизить решение системы (1.1) к этим траекториям. Для решения задачи в такой постановке следуем идее [2], т. е. чтобы удовлетворялось только условие (1.3). В этом случае, как видно из (2.10), нужно подобрать b_r^n так, чтобы интеграл (2.11) принимал минимум. Тогда для определения этих коэффициентов получим систему уравнений

$$\sum_{r=1}^{m} f_{rl} b_r^{(n)} = \gamma_l^{(n)} \quad (l = 1, \ldots, m), \tag{2.17}$$

где обозначено

$$f_{rl} = \int_{\tau_0}^{\tau_N} \int_0^{\pi} F_r(\tau, \psi) F_l(\tau, \psi)\, d\tau d\psi,$$

$$\gamma_l^{(n)} = \int_{\tau_0}^{\tau_N} \int_0^{\pi} [v(\psi)\,\alpha_n(\tau, \psi) - u(\psi)\,\beta_n(\tau, \psi)]\, F_l(\tau, \psi)\, d\tau d\psi.$$

Главный определитель системы (2.17) равен определителю Грамма линейно независимых функций $F_r(\tau, \psi) = F_r(au, av)$ и поэтому отличен от нуля.

Однако решение системы (1.1) на интервале времени $[t_0, t_N]$ будет близким к заданным функциям $a(\tau)u(\psi)$ и $a(\tau)v(\psi)$ с критерием близости (1.3), если число размахов N будет мало, что видно из (2.10). С ростом числа размахов $N < \infty$ среднеквадратическое отклонение (1.3) будет увеличиваться, что ведет к значительному отклонению амплитуды и частоты колебаний объекта от заданных (1.2).

Случай II. Из интервала $[t_0, t_N]$ берем, включая границы, $p\,(2p < m)$ значений $t_j^*\,(j = 1, \ldots, p)$, удовлетворяющих (1.6), т. е. $t_j^* = t_k$, где для каждого индекса j соответствует один индекс k из интервала $[0, N]$.

Подставляя $\tau_j^* = \varepsilon t_j^*$ в (2.9), получаем

$$\begin{gathered}\varphi_j^{(n)}(\tau_j^*, b_1^{(n)}, \ldots, b_m^{(n)}) = \sum_{r=1}^{m} \bar{f}_r(\tau_j^*)\, b_r^{(n)} - \bar{\alpha}_n(\tau_j^*) = 0, \\ \varphi_{p+j}^{(n)}(\tau_j^*, b_1^{(n)}, \ldots, b_m^{(n)}) = \sum_{r=1}^{m} \bar{\bar{f}}_r(\tau_j^*)\, b_r^{(n)} - \bar{\beta}_n(\tau_j^*) = 0.\end{gathered} \tag{2 18}$$

Значения t_j^* выбираются еще так, чтобы ранг матрицы

$$\left\| \frac{\partial \varphi_s^{(n)}}{\partial b_r^{(n)}} \right\|, \quad (s = 1, \ldots, 2p;\; r = 1, \ldots, m)$$

равнялся $2p$. Эта матрица, как видно из (2.18), не зависит от индекса n.

В моменты времени $t_j^* = t_k$, для которых имеет место условие (2.18), фазовые траектории $x(\tau, \varepsilon)$ и $y(\tau, \varepsilon)$ принимают заданное значение, т. е.

$$x(\tau_k, \varepsilon) = (-1)^k a(\tau_k), \quad y(\tau_k, \varepsilon) = 0.$$

Теперь коэффициенты b_r^n определим так, чтобы они удовлетворяли условию (2.18), а интеграл (2.11) принимал минимальное значение, другими словами, нужно решить задачу на условный экстремум.

Положим

$$H_n = I_n - \sum_{s=1}^{2p} l_s^{(n)} \varphi_s^{(n)}. \tag{2.19}$$

На основании (2.19), находим

$$\sum_{r=1}^{m} f_{rl} b_r^{(n)} = \sum_{j=1}^{p} [\bar{f}_l(\tau_j)\, l_j^{(n)} + \bar{\bar{f}}_l(\tau_j)\, l_{p+j}^{(n)}] + \gamma_l^{(n)}. \tag{2.20}$$

Присоединяя к (2.20) уравнения (2.18), получааем $m + 2p$ уравнений для определения m коэффициентов b_r^n и $2p$ коэффициентов $l_j^{(n)}$.

Определение коэффициентов $b_r^{(n)}$ с учетом условий (2.18) дает возможность приблизить амплитуду и частоту колебаний объекта к заданным (1.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
2. Е. А. Барбашин, Об оценке среднеквадратичного значения отклонения от заданной траектории, Автоматика и телемеханика, т. XXI, № 7, 1960.

Поступила 16.I 1963 г.
Львов