О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра

В. И. Фодчук

1. М. А. Красносельским и С. Г. Крейном была доказана теорема о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра [1], которая затем была обобщена Я. Курцвейлем и З. Ворелем на более широкий класс уравнений [2]. Для дифференциально-разностных уравнений теорема о непрерывной зависимости решений от параметра, аналогичная теореме М. А. Красносельского и С. Г. Крейна, доказана В. П. Рубаником [3] и А. Халанаем [4]. Но оказывается, что и в этом случае теорему можно обобщить на более широкий класс уравнений. Настоящая работа посвящена этому обобщению.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t-\Delta), \lambda] \tag{1}$$

и с начальными условиями

$$x(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda) \text{ для } t \in [-\Delta, 0], \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in E^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in E^m$, $\varphi(t, \lambda)$ — некоторая начальная функция, $\varphi(t, \lambda) \in E^m$. Решение ищется вправо от начальной точки $t_0 = 0$.

Пусть выполняются следующие условия:

а) функция $f(t, x, y, \lambda)$ определена для $(t, x, y, \lambda) \in [0, T] \times D \times D \times \Lambda$, где D — открытое множество пространства E^m, а Λ — некоторое множество значений параметра λ, содержащее предельную точку λ_0. Для $x \in D$, $y \in D$, $\lambda \in \Lambda$ функция $f(t, x, y, \lambda)$ измерима по t и, кроме того, существует интегрируемая по Лебегу на $[0, T]$ функция $m(t)$ такая, что

$$\| f(t, x, y, \lambda) \| \leqslant m(t) \tag{3}$$

при $(t, x, y, \lambda) \in [0, T] \times D \times D \times \Lambda$. Для $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$ функция $f(t, x, y, \lambda)$ непрерывна по x, y;

б) функция $\varphi(t, \lambda)$ определена для $t \in [-\Delta, 0]$, $\lambda \in \Lambda$, непрерывна по t, $\|\varphi(t,\lambda)\| \leqslant K$, где K — постоянная, $\varphi(t,\lambda) \in D$ и $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \varphi(t,\lambda) = \varphi(t,\lambda_0)$ равномерно относительно t;

в) существует неубывающая функция $\psi(\delta,\gamma)$, определенная для $0 < \delta \leqslant d$, $0 < \gamma \leqslant d$, $\lim\limits_{\delta,\gamma\to 0} \psi(\delta,\gamma) = 0$, и интегрируемая по Лебегу на $[0,T]$ функция $\chi(t)$

$$\int_0^T \chi(t)\,dt < \infty, \tag{4}$$

такие, что

$$\| f(t, x_1, y_1, \lambda) - f(t, x_2, y_2, \lambda) \| \leqslant \psi(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)\,\chi(t) \tag{5}$$

для $t \in [0,T]$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in D$, $\|x_1 - x_2\| \leqslant d$, $\|y_1 - y_2\| \leqslant d$, $\lambda \in \Lambda$;

г) решение задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda_0$ определено на $[0,T]$, единственно и лежит в D вместе с некоторой своей ϱ-окрестностью.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* а) — г) *и пусть*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t f(\tau, x, y, \lambda)\,d\tau = \int_0^t f(\tau, x, y, \lambda_0)\,d\tau \tag{6}$$

равномерно относительно t, x, y. Тогда для каждого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ решение $x(t,\lambda)$ задачи (1), (2), *удовлетворяющее условию $\|x(0,\lambda) - x(0,\lambda_0)\| < \delta$, определено на $[0,T]$ и справедливо неравенство*

$$\|x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0)\| < \eta \ \text{ для } t \in [0,T]. \tag{7}$$

Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

3. Лемма 1. *Пусть имеет место условие* (6) *и $\widetilde{x}(t)$, $\widetilde{y}(t)$ — кусочно-постоянные функции, определенные на $[0,T]$, $\widetilde{x}(t) = c_i \in D$, $\widetilde{y}(t) = l_i \in D$ для $\tau_{i-1} \leqslant t < \tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t f[\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{y}(\tau), \lambda]\,d\tau = \int_0^t f[\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{y}(\tau), \lambda_0]\,d\tau$$

равномерно относительно t.

Доказательство леммы 1 легко следует из (6).

Лемма 2. *Пусть $x^*(t,\lambda)$ — система непрерывных функций переменного t, $x^*(t,\lambda) \in D$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{t\in[-\Delta,T]} \|x^*(t,\lambda) - x^*(t,\lambda_0)\| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^t f[\tau, x^*(\tau,\lambda), x^*(\tau-\Delta,\lambda), \lambda]\,d\tau = \int_0^t f[\tau, x^*(\tau,\lambda_0), x^*(\tau-\Delta,\lambda_0), \lambda_0]\,d\tau$$

равномерно относительно $t \in [0,T]$.

Доказательство. Так как по предположению функция $\chi(t)$ интегрируема по Лебегу и удовлетворяет условию (4), а функция $\psi(\delta,\gamma)$ такая, что $\lim\limits_{\delta,\gamma\to 0} \psi(\delta,\gamma) = 0$, то для любого ε можно найти такие $\delta = \delta(\varepsilon)$, $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, что

$$\psi(\delta,\gamma) \int_0^T \chi(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Пусть $\widetilde{x}(t)$ — кусочно-постоянная функция такая, что

$$\sup_{t\in[-\Delta,T-\Delta]} \|\widetilde{x}(t) - x^*(t,\lambda_0)\| < \gamma, \qquad \sup_{t\in[0,T]} \|\widetilde{x}(t) - x^*(t,\lambda_0)\| < \delta.$$

Обозначим через $U(\lambda_0)$ такую окрестность точки λ_0, что при всех $\lambda \in U(\lambda_0)$

$$\sup_{t\in[-\Delta, T-\Delta]} \| x^*(t, \lambda) - x^*(t, \lambda_0) \| < \gamma, \qquad \sup_{t\in[0,T]} \| x^*(t, \lambda) - x^*(t, \lambda_0) \| < \delta,$$

$$\left\| \int_0^t \{ f[\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{x}(\tau-\Delta), \lambda] - f[\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{x}(\tau-\Delta), \lambda_0] \} \, d\tau \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Такой выбор $U(\lambda_0)$ возможен в силу леммы 1 и условий леммы 2. Тогда для $\lambda \in U(\lambda_0)$ справедливы неравенства:

$$\int_0^t \| f[\tau, x^*(\tau, \lambda), x^*(\tau-\Delta, \lambda), \lambda] - f[\tau, x^*(\tau, \lambda_0), x^*(\tau-\Delta, \lambda_0), \lambda] \| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \psi(\delta, \gamma) \int_0^T \chi(t) \, dt < \frac{\varepsilon}{6},$$

$$\int_0^t \| f[\tau, x^*(\tau, \lambda_0), x^*(\tau-\Delta, \lambda_0), \lambda] - f[\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{x}(\tau-\Delta), \lambda] \| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \psi(\delta, \gamma) \int_0^T \chi(t) \, dt < \frac{\varepsilon}{6},$$

$$\int_0^t \| f[\tau, \widetilde{x}(\tau), \widetilde{x}(\tau-\Delta), \lambda_0] - f[\tau, x^*(\tau, \lambda_0), x^*(\tau-\Delta, \lambda_0), \lambda_0] \| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \psi(\delta, \gamma) \int_0^T \chi(t) \, dt < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Отсюда и из (8) находим

$$\left\| \int_0^t \{ f[\tau, x^*(\tau, \lambda), x^*(\tau-\Delta, \lambda), \lambda] - f[\tau, x^*(\tau, \lambda_0), x^*(\tau-\Delta, \lambda_0), \lambda_0] \} \, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$, $\lambda_n \in \Lambda$, и пусть функции $x(t, \lambda_n)$ являются решениями задачи* (1), (2), *определенными на* $[0, T_n]$, $0 < T_n \leqslant T$. *Тогда $x(t, \lambda_n)$ есть последовательность равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций.*

Доказательство. Решение задачи (1), (2) удовлетворяет уравнению

$$x(t, \lambda_n) = \varphi(0, \lambda_n) + \int_0^t f[\tau, x(\tau, \lambda_n), x(\tau-\Delta, \lambda_n), \lambda_n] \, d\tau,$$

$$x(t, \lambda_n) = \varphi(t, \lambda_n) \text{ для } t \in [-\Delta, 0]. \tag{9}$$

Тогда для $t_1, t_2 \in [0, T_n], t_1 < t_2$, найдем

$$x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) = \int_{t_1}^{t_2} f[\tau, x(\tau, \lambda_n), x(\tau-\Delta, \lambda_n), \lambda_n] \, d\tau.$$

Отсюда

$$\| x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \| \leqslant \left\| \int_{t_1}^{t_2} f[\tau, x(t_1, \lambda_n), x(t_1 - \Delta, \lambda_n), \lambda_n]\, d\tau \right\| +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \| f[\tau, x(\tau, \lambda_n), x(\tau - \Delta, \lambda_n), \lambda_n] - f[\tau, x(t_1, \lambda_n), x(t_1 - \Delta, \lambda_n), \lambda_n] \|\, d\tau. \quad (10)$$

В силу (6) существует неубывающая функция $A(\delta)$, определенная для достаточно малых положительных δ, $\lim\limits_{\delta \to 0} A(\delta) = 0$, такая, что

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau, u, v, \lambda)\, d\tau = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, u, v, \lambda_0)\, d\tau + R(t_1, t_2, u, v, \lambda),$$

$$u, v \in D, \quad \| R \| \leqslant A(|\lambda - \lambda_0|). \quad (11)$$

Учитывая (3), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\tau, u, v, \lambda_0)\, d\tau \leqslant c(t_2 - t_1), \quad (12)$$

где $c(\delta)$ — неубывающая функция при $\delta > 0$, $\lim\limits_{\delta \to 0} c(\delta) = 0$.

Для доказательства равностепенной непрерывности функций $x(t, \lambda_n)$ нам нужно показать, что для произвольного ε, $0 < \varepsilon \leqslant d$, существуют такие $N(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon)$, что из

$$t_1, t_2 \in [0, T_n], \quad 0 < t_2 - t_1 < \delta(\varepsilon), \quad n > N(\varepsilon), \quad (13)$$

следует

$$\| x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \| < \varepsilon.$$

Возьмем такое N, чтобы для $n > N$

$$A(|\lambda_n - \lambda_0|) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (14)$$

и, далее, δ такое, чтобы

$$c(\delta) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \nu(\delta)\, \psi(\varepsilon, d) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (15)$$

где $\nu(\delta)$ — неубывающая функция, $\lim\limits_{\delta \to 0} \nu(\delta) = 0$,

$$\nu(\bar{t}_2 - \bar{t}_1) > \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \chi(t)\, dt \text{ для } 0 \leqslant \bar{t}_1 \leqslant \bar{t}_2 \leqslant T.$$

Предположим, что справедливо (13) и что

$$\| x(t_2, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \| \geqslant \varepsilon. \quad (16)$$

Так как функции $x(t, \lambda_n)$ непрерывны, то существует такое t_3, $t_1 < t_3 \leqslant t_2$, что $\| x(t_3, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \| = \varepsilon$, но $\| x(\tau, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \| < \varepsilon$ для $t_1 \leqslant \tau < t_3$. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_3} \| f[\tau, x(\tau, \lambda_n), x(\tau - \Delta, \lambda_n), \lambda_n] - f[\tau, x(t_1, \lambda_n), x(t_1 - \Delta, \lambda_n), \lambda_n] \|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_3} \chi(\tau)\, \psi(\| x(\tau, \lambda_n) - x(t_1, \lambda_n) \|, \| x(\tau - \Delta, \lambda_n) - x(t_1 - \Delta, \lambda_n) \|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \nu(\delta)\, \psi(\varepsilon, d). \quad (17)$$

Неравенства (10), (11) и (12), где вместо t_2 следует писать t_3, вместе с неравенствами (14), (15) и (17) ведут к противоречию

$$\varepsilon < A(|\lambda_n - \lambda_0|) + c(\delta) + \nu(\delta)\psi(\varepsilon, d) < \varepsilon.$$

Значит допущение (17) неверно и, следовательно, функции $x(f, \lambda_n)$ равностепенно непрерывны.

Равномерная ограниченность функций $x(t, \lambda_n)$ следует из (3) и из того, что $\|\varphi(t, \lambda)\| \leqslant K$. Это видно из (9).

Лемма 3 доказана.

4. Доказательство теоремы 1. В силу теоремы существования, сформулированной и доказанной в [5], при выполнении условия а) для каждого фиксированного λ решение задачи (1), (2) существует на некотором конечном промежутке $[0, T_\lambda]$. Из неравенства (3) следует ограниченность снизу множества значений T_λ некоторой положительной постоянной T_0, $T_0 \leqslant T$.

Согласно лемме 3 любая последовательность решений $x(t, \lambda_n)$ задачи (1), (2) образует систему равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $x(t, \lambda_{n_k})$, равномерно сходящуюся на $[0, T_0]$ к непрерывной функции $y(t)$, причем $y(t) \in D$ для $t \in [0, T_0]$. Докажем, что $y(t) = x(t, \lambda_0)$. Для этого в равенстве (9) заменим n на n_k и перейдем к пределу при $k \to \infty$. В силу леммы 2 получим

$$y(t) = \varphi(0, \lambda_0) + \int_0^t f[\tau, y(\tau, \lambda_0), y(\tau - \Delta, \lambda_0), \lambda_0]\, d\tau,$$

$$y(t) = \varphi, (t, \lambda_0) \text{ для } t \in [-\Delta, 0].$$

Это значит, что функция $y(t)$ является решением задачи (1), (2) при $\lambda = \lambda_0$. Из единственности решения $x(t, \lambda_0)$ следует, что $y(t) = x(t, \lambda_0)$ для $t \in [0, T_0]$.

Таким образом, всякая равномерно сходящаяся последовательность функций $\{x(t, \lambda_{n_k})\}$ сходится на $[0, T_0]$ к $x(t, \lambda_0)$. Поэтому можно выбрать такую окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0, что для $\lambda \in U(\lambda_0)$ на отрезке $[0, T_0]$ будет выполнятся неравенство

$$\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \eta.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 нужно еще показать, что рассматриваемые решения $x(t, \lambda)$ определены и удовлетворяют неравенству (7) на всем интервале $[0, T]$. В следующей теореме показано, что это условие выполнено, если выполняются остальные предположения теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть справедливо равенство* (6) *равномерно относительно t, x, y и пусть функция $z(t)$, определенная на интервале $[0, T_0]$, $T_0 \leqslant T$, удовлетворяет уравнению* (1) *с начальными условиями* (2) *при некотором фиксированном $\lambda = \lambda_1 \in \Lambda$. Тогда для каждого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\lambda = \lambda_1$, $|\lambda_1 - \lambda_0| < \delta$, существует решение задачи* (1), (2) *$u = u(t)$, определенное на $[0, T]$, и $u(t) = z(t)$ для $t \in [0, T_0]$, причем справедливо неравенство*

$$\|u(t) - x(t, \lambda_0)\| < \eta$$

для всех $t \in [0, T]$, если только

$$\|z(0) - x(0, \lambda_0)\| \leqslant \delta.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 2 в [2] и здесь не приводится.

Замечание. Теорема 1 имеет место и в том случае, когда запаздывание Δ является непрерывной и неотрицательной функцией параметра $\lambda \in \Lambda$.

Теорема 3 (о принципе усреднения). *Пусть функция* $X(t, x, y)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *она определена для* $(t, x, y) \in [0, T] \times D \times D$, *где* D — *открытое множество пространства* E^m, *измерима по* t *и, кроме того, существует интегрируемая по Лебегу на* $[0, T]$ *функция* $m(t)$ *такая, что*

$$\| X(t, x, y) \| \leqslant m(t)$$

при $t, x, y \in [0, T] \times D \times D$. *Для* $t \in [0, T]$ *функция* $X(t, x, y)$ *непрерывна по* x, y;

2) *существуют неубывающая функция* $\psi(\delta, \gamma)$, *определенная для* $0 \leqslant \delta \leqslant d$, $0 < \gamma \leqslant d$, $\lim\limits_{\delta, \gamma \to 0} \psi(\delta, \gamma) = 0$ *и интегрируемая по Лебегу на* $[0, T]$ *функция* $\chi(t)$,

$$\int_0^T \chi(t)\, dt < \infty,$$

такие, что

$$\| X(t, x_1, y_1) - X(t, x_2, y_2) \| \leqslant \psi(\| x_1 - x_2 \|, \| y_1 - y_2 \|)\, \chi(t)$$

$$\text{для } t \in [0, T], x_1, x_2, y_1, y_2 \in D, \| x_1 - x_2 \| \leqslant d, \ \| y_1 - y_2 \| \leqslant d;$$

3) *при фиксированных* $x \in D$, $y \in D$ *существует предел*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, y)\, dt = X_0(x, y) \tag{18}$$

равномерно относительно x, y;

4) *уравнение*

$$\frac{d\xi(t_1)}{dt_1} = X_0[\xi(t_1), \xi(t_1)] \tag{19}$$

имеет единственное решение $\xi = \xi(t_1)$, *удовлетворяющее начальному условию* $\xi(0) = \xi_0$, *определенное для* $t \in [-\Delta_0, T]$ *и лежащее в* D *вместе с некоторой своей* ϱ-*окрестностью* ($\Delta_0 = \sup\limits_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \Delta(\varepsilon)$).

Тогда для каждого $\eta > 0$ *найдется такое* ε_0, *что для* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *решение* $x(t, \varepsilon)$ *уравнения*

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon X\{t, x(t), x[t - \Delta(\varepsilon)]\}, \tag{20}$$

удовлетворяющее условию $x(t, \varepsilon) = \xi(\varepsilon t)$ *для* $t \in [-\Delta_0, 0]$, *существует на интервале* $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$ *и удовлетворяет на этом интервале неравенству*

$$\| x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t) \| < \eta.$$

Доказательство. Сделаем в уравнении (20) замену независимого переменного по формуле $t = \frac{t_1}{\varepsilon}$ и обозначим $X\left\{\frac{t_1}{\varepsilon}, x(t_1), x[t_1 - \varepsilon\Delta(\varepsilon)]\right\}$ через $X_1\{t_1, x(t_1), x[t_1 - \Delta_1(\varepsilon)], \varepsilon\}$. Получим уравнение

$$\frac{dx(t_1)}{dt_1} = X_1\{t_1, x(t_1), x[t_1 - \Delta_1(\varepsilon)], \varepsilon\}. \tag{21}$$

Нетрудно убедиться, что правая часть уравнения (21) удовлетворяет всем условиям теоремы 1, причем предельным уравнением для уравнения (21) при $\varepsilon \to 0$ будет уравнение (19) (см. [4]).

Действительно, условия а) — г) выполняются в силу условий 1), 2) и 4) теоремы 3. Покажем, что из условия 3) следует условие (6) теоремы 1. Для этого положим в равенстве (18) $T = \frac{t_1}{\varepsilon}$, где t_1 — фиксированное положительное число, $t_1 \leqslant T$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{t_1} \int\limits_0^{\frac{t_1}{\varepsilon}} X(t, x, y)\, dt = X_0(x, y).$$

Сделаем замену переменной интегрирования $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$ и умножим обе части полученного равенства на t_1. Получаем равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{t_1} X\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, y\right) d\tau = t_1 X_0(x, y) = \int\limits_0^{t_1} X_0(x, y)\, d\tau,$$

аналогичное равенству (6).

Итак, все условия теоремы 1 выполняются. Поэтому теорема 3 является следствием теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, О принципе усреднения в нелинейной механике, УМН, т. X, вып. 3, 1955.

2. Я. Курцвейль и З. Ворел, О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра, Чехослов. матем. ж., т. 7 (82), № 4, 1957.

3. В. П. Рубаник, О зависимости решений дифференциально-разностных уравнений от параметра, Сибирск. матем. ж., т. II, № 6, 1961.

4. А. Халанай, Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Rev. Math. pur. et appl., v. 4, № 3, 1959.

5. В. І. Фодчук, Деякі теореми існування і единості для диференціальних рівнянь з запізнюючим аргументом, Доп. АН УРСР, № 12, 1962.

Поступила 4.V 1962 г.
Киев