Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений, близких к уравнениям с переменными коэффициентами, в гильбертовом пространстве

Ю. А. Митропольский

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) + P(t, \varphi, h, \varepsilon),$$
$$\frac{dh}{dt} = H(t)h + Q(t, \varphi, h, \varepsilon), \tag{1}$$

где $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots)$ и $Q(t, \varphi, h, \varepsilon) = \{Q_1(t, \varphi, h_1, h_2, \ldots, \varepsilon), Q_2(t, \varphi, h_1, h_2, \ldots, \varepsilon), \ldots\}$ — вектор-функции со значениями в гильбертовом пространстве H, $\omega(t)$ — непрерывная и ограниченная функция времени t для всех вещественных t, ε — малый положительный параметр.

Система вида (1), когда $h(t)$ и $Q(t, \varphi, h, \varepsilon)$ — вектор-функции n-мерного евклидова пространства, была нами рассмотрена в работе [2].

Относительно рассматриваемой системы (1) предположим, что выполняются следующие условия: можно указать такие положительные постоянные ε_0, ϱ_0, что

1) функция $P(t, \varphi, h, \varepsilon)$ и вектор-функция $Q(t, \varphi, h, \varepsilon)$ гильбертова пространства H определены в области

$$-\infty < t < \infty, \ -\infty < \varphi < \infty, \ h \in U_{\varrho_0}, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{2}$$

где U_ϱ — ϱ-окрестность точки $h = 0$, непрерывны по всем переменным и ограничены;

2) в области

$$-\infty < t < \infty, \ -\infty < \varphi < \infty, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{3}$$

имеют место неравенства

$$|P(t, \varphi, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \qquad \|Q(t, \varphi, 0, \varepsilon)\| \leqslant M(\varepsilon), \tag{4}$$

где $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; при этом $\|x\|$ обозначает норму элемента x в пространстве $H \left(\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \right)$;

3) для любого положительного $\varrho < \varrho_0$ в области

$$-\infty < t < \infty, \ -\infty < \varphi', \ \varphi'' < \infty, \ h', \ h'' \in U_\varrho, \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{5}$$

имеют место неравенства

$$|P(t,\ \varphi',\ h',\ \varepsilon)-P(t,\ \varphi'',\ h'',\ \varepsilon)|\leqslant\lambda(\varepsilon,\ \varrho)\{|\varphi'-\varphi''|+\|h'-h''\|\},\qquad(6)$$

$$\|Q(t,\ \varphi',\ h',\ \varepsilon)-Q(t,\ \varphi'',\ h'',\ \varepsilon)\|\leqslant\lambda(\varepsilon,\ \varrho)\{|\varphi'-\varphi''|+\|h'-h''\|\},$$

где $\lambda(\varepsilon,\ \varrho)\to 0$ при $\varepsilon\to 0,\ \varrho\to 0$;

4) для любых $t(-\infty<t<\infty)$ матричная оператор-функция $H(t)$ является ограниченной оператор-функцией в гильбертовом пространстве H, для которой вещественные части всех точек спектра отрицательны, и, следовательно, для разрешающей оператор-матрицы $U(t,\ \tau)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dU(t,\ \tau)}{dt}=H(t)U(t,\ \tau),\quad U(t,\tau)\,|_{\tau=t}=E\qquad(7)$$

где E — единичная матрица в пространстве H, как нетрудно видеть, справедлива следующая оценка

$$\|U(t,\ \tau)\|\leqslant Ke^{-\gamma(t-\tau)},\ t>\tau,\qquad(8)$$

где K и γ — положительные постоянные*.

При этих предположениях, обобщая метод, изложенный в работах [1, 2], можно доказать существование и устойчивость интегрального многообразия для системы уравнений (1), зависящего от одного параметра φ, после чего исследование решений системы уравнений (1), лежащих на найденном многообразии, сведется к рассмотрению вместо системы (1) только одного уравнения для φ.

Как и в [1], фиксируем некоторые положительные числа $D,\ \Delta\,(\Delta<\varrho)$ и рассмотрим класс $C^H(D,\ \Delta)$ ограниченных непрерывных вектор-функций $F(t,\ \varphi)$ со значениями в гильбертовом пространстве H, определенных в области

$$-\infty<t<\infty,\ -\infty<\varphi<\infty\qquad(9)$$

и удовлетворяющих в этой области неравенствам

$$\|F(t,\ \varphi)\|\leqslant D,\ \|F(t,\ \varphi')-F(t,\ \varphi'')\|\leqslant\Delta\,|\varphi'-\varphi''|.\qquad(10)$$

Для некоторой функции $F(t,\ \varphi)$ из класса $C^H(D,\ \Delta)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega(t)+P(t,\ \varphi,\ F(t,\ \varphi),\ \varepsilon),\qquad(11)$$

для которого приведенные выше условия позволяют в силу теоремы Коши построить единственное решение

$$\varphi_t=T^F_{z,t_0}(\varphi_0)\quad(z=t-t_0).\qquad(12)$$

После этого, как и в [2], можем рассмотреть преобразование

$$SF=\int\limits_{-\infty}^{0}U(t,\ t+z)Q(t+z;\ T^F_{z,t}(\varphi);\ F(t+z;\ T^F_{z,t}(\varphi));\ \varepsilon)dz,\qquad(13)$$

которое преобразует функцию F из класса $C^H(D,\ \Delta)$ в функцию SF.

---

* Можно было бы наложить и менее жесткое условие на оператор-функцию $H(t)$, требуя только, чтобы для любых $t\ (-\infty<t<\infty)$ абсолютные значения вещественных частей всех точек спектра $\sigma(H)$ имели нижнюю грань, отличную от нуля. Однако в этом случае получаемое многообразие будет обладать только условной устойчивостью, как, например, это показано для уравнений в эвклидовом пространстве в работе [1].

Кроме того, здесь мы не останавливаемся на ряде тонких явлений, обнаруживаемых в поведении исследуемого интегрального многообразия, обусловленных различными особенностями спектра в гильбертовом пространстве. Эти явления будут детально продискуссированы нами в более подробной статье.

Выбирая соответствующим образом $D = D(\varepsilon)$ и $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ и принимая во внимание условия 1) — 4), нетрудно показать, что оператор S является оператором сжатия, отображающим полное нормированное пространство $C^H(D, \Delta)$ самого в себя, и, следовательно, согласно теореме Каччиополи—Банаха о сжатых отображениях уравнение (13) имеет единственное решение

$$F = f(t, \varphi, \varepsilon), \tag{14}$$

которое определяет интегральное многообразие для системы уравнений (1).

Рассматривая теперь интегро-дифференциальную систему, эквивалентную системе дифференциальных уравнений (1),

$$h = \int_{t_0}^{t} U(t, \tau) Q(\tau, \varphi_\tau, h_\tau, \varepsilon)\, d\tau + U(t, t_0) A,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) + P(t, \varphi, h, \varepsilon), \quad t > t_0 \tag{15}$$

$$\varphi_t = \varphi_0 \text{ при } t = t_0,$$

где A — произвольный фиксированный вектор гильбертова пространства H, как и в работе [2], без затруднений можно показать, что любое решение h_t системы (1), для которого $h_0 < D$, с течением времени стремится к многообразию (14).

В результате получаем следующую теорему.

Теорема. *Пусть для системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(t) + P(t, \varphi, h, \varepsilon), \\ \frac{dh}{dt} &= H(t) h + Q(t, \varphi, h, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

где $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \ldots)$ и $Q(t, \varphi, h, \varepsilon) = \{Q_1(t, \varphi, h_1, h_2, \ldots, \varepsilon), Q_2(t, \varphi, h_1, h_2, \ldots, \varepsilon), \ldots\}$ *— вектор-функции со значениями в гильбертовом пространстве* H, $\omega(t)$ *— ограниченная непрерывная функция времени* t *для всех вещественных* t, ε *— малый положительный параметр, выполняются условия* 1) — 4), *приведенные на стр. 54.*

Тогда всегда можно указать такие положительные постоянные ϱ^* *и* ε^* $(\varrho^* < \varrho_0,\ \varepsilon^* < \varepsilon_0)$, *что для каждого положительного* $\varepsilon < \varepsilon^*$ *система уравнений* (1) *имеет единственное однопараметрическое интегральное многообразие, представимое в явном виде соотношениями*

$$h = f(t, \varphi, \varepsilon), \tag{16}$$

в которых $f(t, \varphi, \varepsilon)$ *как вектор-функция* t *и* φ *со значениями в гильбертовом пространстве* H *определена для* $-\infty < t < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$\| f(t, \varphi, \varepsilon) \| < D(\varepsilon) < \varrho^*, \tag{17}$$

$$\| f(t, \varphi', \varepsilon) - f(t, \varphi'', \varepsilon) \| \leqslant \Delta(\varepsilon) |\varphi' - \varphi''|, \tag{18}$$

в которых $\Delta(\varepsilon) \to 0$, $D(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Интегральное многообразие (16) *обладает свойством устойчивости, заключающимся в том, что любое решение системы* (1) $h = h(t)$, *начальные значения которого принадлежат области* U_{ϱ^*}, *с течением времени притягивается к нему по закону*

$$\| h(t) - f(t, \varphi, \varepsilon) \| \leqslant K(\varepsilon, D) e^{-\gamma(t - t_0)}, \tag{19}$$

при этом

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} - \omega(t) - P_1(t, \varphi, \varepsilon) \right| \leqslant C(\varepsilon) e^{-\gamma(t-t_0)}, \tag{20}$$

где обозначено

$$P_1(t, \varphi, \varepsilon) = P(t, \varphi, f(t, \varphi), \varepsilon),$$

а γ — *некоторое положительное постоянное,* $C(\varepsilon) \to 0$, $K(\varepsilon, D) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $D \to 0$.

Для решений, лежащих на интегральном многообразии (16), *исследование системы* (1) *сводится к рассмотрению одного дифференциального уравнения*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) + P(t, \varphi, f(t, \varphi), \varepsilon), \tag{21}$$

где $f(t, \varphi)$ — *вектор-функция со значениями из гильбертова пространства* H, *для которой, очевидно, справедливо условие* $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < \infty$.

Как известно, интегральное многообразие является образованием более стабильным по отношению к малым изменениям правых частей уравнений по сравнению с индивидуальными решениями.

Поэтому, задаваясь малым положительным δ, всегда можно найти такое n, что

$$\| P(t, \varphi, f, \varepsilon) - P_n(t, \varphi, f, \varepsilon) \| \leqslant \delta(n), \tag{22}$$

где обозначено

$$P_n(t, \varphi, f, \varepsilon) = P(t, \varphi, f_1, f_2, \ldots, f_n, 0, 0, \ldots, \varepsilon), \tag{23}$$

и, следовательно, вместо уравнения (21) можем рассматривать следующее:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) + P_n(t, \varphi, f, \varepsilon). \tag{24}$$

В заключение заметим, что к системам дифференциальных уравнений типа (1) при выполнении условий 1)—4) (см. стр. 54) приводятся многие задачи, связанные с исследованием нестационарных колебательных процессов в нелинейных системах, описываемых счетными системами нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, в частности к ним сводится в ряде случаев исследование колебательных явлений в так называемых системах с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.

2. Ю. А. Митропольский, Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, УМЖ, т. X, № 3, 1958.

Поступила 13.II 1964 г.
Киев

On the investigation of an integral manifold for a system of nonlinear equations close to equations with variable coefficients in a Hilbert space

Y. A. Mitropolsky

Summary

The author considers a system of differential equations

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t) + P(t, \varphi, h, \varepsilon)$$

$$\frac{dh}{dt} = H(t)h + Q(t, \varphi, h, \varepsilon)$$

where h and Q are vector functions with values in Hilbert space H, $\omega(t)$ is a limited operator function in Hilbert space H, for which the real parts of all points of the spectrum are negative. The existence and stability of a one-dimensional integral manifold for system (1) is proved with certain assumptions.