О квазигладких функциях двух переменных

Б. Д. Котляр

Функция $f(x, y)$, заданная в области D, называется квазигладкой в этой области по совокупности переменных, если для любых $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \in D$ выполняется неравенство

$$\left|f(x_1, y_1) - 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) + f(x_2, y_2)\right| \leqslant K\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \tag{1}$$

где K не зависит от точек M_1, M_2 (см., например, [1]).

Если для функции $f(x, y)$ неравенство (1) выполняется при $y_1 = y_2$ равномерно по y, то функция называется квазигладкой по переменной x. Соответственно определяется квазигладкость по переменной y.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x, y)$, заданная и ограниченная в прямоугольнике $D[a, b; c, d]$, была квазигладка по совокупности переменных, необходимо и достаточно, чтобы она была квазигладка по каждой переменной в отдельности.*

Необходимость очевидна.

Для доказательства достаточности потребуется несколько простых лемм.

Лемма I. *Если через точку $M_0 \in \overline{D}[a, b; c, d]$ провести две прямые, угловые коэффициенты которых удовлетворяют условию $k_1 + k_2 = 0$, то сумма длин отрезков этих прямых, ограниченных сторонами прямоугольника $\overline{D}$, не меньше*

$$m = \min\{b-a;\ d-c\}.$$

Доказательство просто.

Лемма II. *Пусть в прямоугольнике $\overline{D}$ задан отрезок M_1M_2 ($|M_1M_2| = h$); пусть через средину отрезка M_1M_2 проведены две прямые, угловые коэффициенты которых удовлетворяют условию $k_1 + k_2 = 0$ (одна из них проходит через M_1M_2, а другая через средину этого отрезка); тогда на одном из отрезков этих прямых, заключенном между сторонами прямоугольника $\overline{D}$, можно отложить последовательно отрезок M_1M_2 по обе стороны от отрезка M_1M_2 (либо сопряженного ему) 2^n раз так, что длина образовавшегося отрезка не меньше $\frac{m}{6}$.*

Следует из леммы I.

Лемма. III. *Пусть прямоугольник $\overline{D^*}[\xi + k, \xi - k; \eta + h, \eta - h] \subset \overline{D}$ и $f(x, y)$ — заданная в $\overline{D}$ функция, квазигладкая по каждой переменной. Тогда*

$$|f(\xi + h, \eta + h) + f(\xi + k, \eta - h) + f(\xi - k, \eta + h) + f(\xi - k, \eta - h) - \\ - 4f(\xi, \eta)| \leqslant K_1 \cdot 2\sqrt{h^2 + k^2},$$

где K_1 не зависит от выбора прямоугольника $\overline{D^*}$.

Пусть точки A, B, C, D — вершины прямоугольника $\overline{D}^*$ (перечисление в порядке обхода), E — средина стороны AB, F — средина стороны CD. Для доказательства применим квазигладкость по переменным функции $f(x, y)$ и отрезкам AB, CD и EF.

Перейдем к доказательству теоремы. Не ограничивая общности, предположим, что константа в правой части неравенства (1) для каждой переменной равна 1. Из ограниченности и квазигладкости по каждой переменной функции $f(x, y)$ вытекает ее непрерывность. Пусть

$$M = \max_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) - \min_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) \tag{2}$$

и

$$N = \frac{6M}{m}. \tag{3}$$

Зададимся отрезком M_1M_2, принадлежащим D; ($|M_1M_2| = h$). Построим прямые, о которых говорится в лемме II, и воспользуемся этой леммой. В результате этого на одной из прямых можно отложить отрезок M_1M_2 2^n раз так, что полученный отрезок A_1A_3 принадлежит D и $H = |A_1A_3| \geqslant \geqslant \frac{m}{6}$, т. е.

$$2^n h \geqslant \frac{m}{6}. \tag{4}$$

Построим прямоугольник $\overline{D}_0$, у которого диагональю является отрезок A_1A_3 и стороны которого параллельны осям координат. Вершины прямоугольника $\overline{D}_0$ обозначим A_1, A_2, A_3, A_4 (вершины перечислены в порядке обхода). Очевидно, что $\overline{D}_0 \subset D$. Построим гиперболический параболоид вида

$$\varphi_0(x, y) = Axy + Bx + Cy + D, \tag{5}$$

проходящий через точки $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ (параболоид может выразиться в плоскость). Обозначим модуль второй разности, взятой по функции $\varphi_0(x, y)$ на отрезке A_1A_3 через $2l_0$. Очевидно, что

$$2l_0 \leqslant M = N\cdot\frac{m}{6} \leqslant NH \tag{6}$$

(см. (2) — (4)).

Разобьем прямоугольник $\overline{D}_0$ на четыре равных прямоугольника и обозначим через $\overline{D}_1$ тот из них, который содержит отрезок M_1M_2. Вершины прямоугольника $\overline{D}_1$ обозначим B_1, B_2, B_3, B_4. Нумерацию вершин всегда можно выбрать так, чтобы

$$\varphi_0(B_1) = f(B_1),$$

$$|\varphi_0(B_2) - f(B_2)| \leqslant \frac{1}{2}H,$$

$$|\varphi_0(B_4) - f(B_4)| \leqslant \frac{1}{2}H,$$

$$|\varphi_0(B_3) - f(B_3)| \leqslant H.$$

Проведем через точки $f(B_1)$, $f(B_2)$, $f(B_3)$, $f(B_4)$ гиперболический параболоид $\varphi_1(x, y)$ вида (5). Модуль второй разности, взятой по функции $\varphi_1(x, y)$ на отрезке B_1B_3 или B_2B_4,

$$2l_1 \leqslant \frac{l_0 + H}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H\right); \qquad l_1 \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{l_0}{2} + \frac{H}{2}.$$

Продолжая дальше описанный процесс, имеем по индукции

$$l_k \leqslant \frac{1}{2^k} \cdot \frac{l_0}{2^k} + \frac{H}{2^k} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i},$$

т. е.

$$l_k \leqslant (N+2) \cdot \frac{H}{2^k};$$

для $k = n$ получаем

$$l_n \leqslant (N+2)\, h. \tag{7}$$

Однако из линейчатости гиперболического параболоида и квазигладкости $f(x, y)$ по каждой переменной следует, что

$$\max_{(x,y)\in \overline{D}_n} |\varphi_n(x, y) - f(x, y)| \leqslant Lh. \tag{8}$$

Из (7), (8) и леммы III следует квазигладкость функции $f(x,y)$ по совокупности переменных.

Очевидно, что приведенное доказательство проходит, если вместо прямоугольника $\overline{D}$ взять всю плоскость, а функцию $f(x, y)$ предположить ограниченной.

В общем случае для произвольной области D (например областей типа круга) не известен результат, аналогичный приведенному. Можно лишь утверждать, что функция, квазигладкая в области D по каждой переменной, квазигладка по их совокупности в области $E \subset D$, если

$$\mathrm{Fr}\,(E) \cap \mathrm{Fr}\,(D) = \Lambda.$$

Другое доказательство приведенной теоремы, основанное на применении конструктивной теории функций, несколько раньше дано М. Ф. Тиманом [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.

2. М. Ф. Тіман, Про повний і частинний модулі гладкості функцій багатьох змінних, Доп. АН УРСР, № 12, 1961.

Поступила 19.X 1961 г.
Днепропетровск