Об одном нестационарном итерационном методе приближенного решения линейных операторных уравнений

А. Ю. Лучка, Н. С. Курпель

В настоящей работе рассматривается один нестационарный итерационный метод приближенного решения линейных уравнений в банаховом пространстве, приводятся достаточные условия сходимости последовательных приближений к точному решению и даются оценки погрешности n-го приближения.

1. Рассмотрим линейное уравнение

$$u = f + Au, \tag{1}$$

в котором A — линейный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве E, f — известный и u — искомый элементы пространства E.

Пусть задана последовательность линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ (некоторые из них могут повторяться), действующих в пространстве E или переводящих E в подпространства соответственно $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ и таких, что для каждого A_n существует обратный оператор $(J - A_n)^{-1}$.

Используя идеи метода осреднения функциональных поправок [1—4], строим последовательные приближения на основе формул

$$u_n = f + Au_{n-1} + \alpha_n, \tag{2}$$

где

$$\alpha_n = A_n\delta_n, \quad \delta_n = u_n - u_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

u_0 — произвольный элемент пространства E.

Согласно (2) и (3) для определения α_n имеем следующее уравнение

$$\alpha_n = A_n\varepsilon_{n-1} + A_n\alpha_n, \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_{n-1} = f - u_{n-1} + Au_{n-1}.$$

2. Можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n L_{n-1} \ldots L_2 L_1 \| = 0, \tag{5}$$

где

$$L_n = (J - A_n)^{-1}(A - A_n), \tag{6}$$

(J — тождественный оператор), то последовательные приближения, определяемые формулами (2)—(3), *сходятся по норме к единственному в* E *решению уравнения* (1). *При этом, если* $\|L_n\| < 1$, *то оценка погрешности n-го приближения дается неравенством*

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \frac{\| L_n \|}{1 - \| L_n \|} \| u_n - u_{n-1} \|. \tag{7}$$

Доказательство. Подставив (3) в (2), получим

$$u_n = f + (A - A_n) u_{n-1} + A_n u_n. \tag{8}$$

Так как по предположению при всех n существуют обратные операторы $(J - A_n)^{-1}$, то из уравнения (8) получаем

$$u_n = (J - A_n)^{-1} f + (J - A_n)^{-1}(A - A_n) u_{n-1} \tag{9}$$

или же

$$u_n = f_n + L_n u_{n-1}, \quad f_n = (J - A_n)^{-1} f. \tag{10}$$

Мы свели итерационный процесс (2)—(3) к обычному нестационарному интерационному процессу (10), условием сходимости которого для произвольного $u_0 \in E$ и является условие (5).

Установим теперь оценку погрешности (7).

Пусть u^* — точное решение уравнения (1). Тогда

$$u^* = f + Au^* - A_n u^* + A_n u^*,$$

откуда

$$u^* = (J - A_n)^{-1} f + (J - A_n)^{-1}(A - A_n) u^*$$

или

$$u^* = f_n + L_n u^* . \tag{11}$$

На основании формул (10) — (11) получаем

$$u^* - u_n = L_n u^* - L_n u_n + L_n u_n - L_n u_{n-1} . \tag{12}$$

Отсюда

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \| L_n \| \| u^* - u_n \| + \| L_n \| \| u_n - u_{n-1} \|$$

и, следовательно,

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \frac{\| L_n \|}{1 - \| L_n \|} \| u_n - u_{n-1} \| .$$

Теорема 2. *Если последовательность операторов A_1, A_2, ..., A_n, ... равномерно (т. е. по норме) сходится к оператору A и для всех A_n существуют равномерно ограниченные обратные операторы $(J - A_n)^{-1}$, то единица не является точкой спектра оператора A и процесс последовательных приближений* (2)—(3) *сходится к единственному решению уравнения* (1).

Действительно, если выполняется условие теоремы, то из (6) видно, что в этом случае $\| L_n \| \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, выполняется условие (5).

3. Рассмотрим теперь один частный случай, когда в качестве операторов A_n берутся операторы $P_n A$, AP_n или $P_n A P_n$, где P_n — оператор проектирования пространства E на его подпространства E_n. В этом случае справедлива

Теорема 3. *Если оператор A вполне непрерывный, $P_n \to J$ на E, т. е.*

$$\lim_{n \to \infty} P_n x = x \qquad (x \in E),$$

и при этом существуют равномерно ограниченные по n операторы $(J - P_n A)^{-1}$, $(J - AP_n)^{-1}$ или $(J - P_n A P_n)^{-1}$, то итерационный процесс (2) — (3) *сходится к решению уравнения* (1).

Доказательство этой теоремы основывается на том, что в этом случае при $n \to \infty$ соответственно

$$\| L_n \| = \| (J - P_n A)^{-1} (A - P_n A) \| \leqslant \| (J - P_n A)^{-1} \| \| A - P_n A \| \to 0 \quad (A_n = P_n A),$$

$$\| L_n \| = \| (J - AP_n)^{-1} (A - AP_n) \| \leqslant \| (J - AP_n)^{-1} \| \| A - AP_n \| \to 0 \, (A_n = AP_n),$$

$$\| L_n \| = \| (J - P_n A P_n)^{-1} (A - P_n A P_n) \| \leqslant \| (J - P_n A P_n)^{-1} \| \| A - P_n A P_n \| \to$$

$$\to 0 \, (A_n = P_n A P_n).$$

и, поэтому, выполняется условие (5).

4. Рассмотрим теперь случай, когда пространство E гильбертово.

Пусть дана последовательность самосопряженных проекционных операторов P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$, проектирующих пространство E соответственно на его подпространства E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ такие, что имеет место соотношение

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$$

Введем обозначения

$$\Omega_n = (J - P_n A)^{-1} Q_n ,$$

$$\Omega_n^* = (J - AP_n)^{-1} A Q_n ,$$

$$\overline{L}_n = Q_n A (J - P_n A)^{-1} Q_n \quad (Q_n = J - P_n) .$$

Тогда справедлива лемма.

Лемма. *Если для некоторого k выполняется условие $\| \overline{L}_k \| < 1$, то для любого $m > k$ справедливо соотношение*

$$\| \overline{L}_m \| \leqslant \| \overline{L}_k \| .$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$u = Q_m v + P_m A u , \tag{13}$$

где v — любой элемент из пространства E, а u — искомый элемент.

Используя соотношения $Q_k Q_m = Q_m$ и $Q_k (P_m - P_k) = P_m - P_k$, представим уравнение (13) в виде

$$u = Q_k Q_m v + P_k A u + Q_k (P_m - P_k) A u ,$$

откуда

$$u = (J - P_k A)^{-1} Q_k [Q_m v + (P_m - P_k) A u] \tag{14}$$

и

$$Q_k A u = \overline{L}_k [Q_m v + (P_m - P_k) A u] . \tag{15}$$

Так как $Q_m (P_m - P_k) = 0$ и операторы Q_m и $P_m - P_k$ самосопряженные, то из (15) получаем

$$\| Q_m \check{A} u \|^2 + \| (P_m - P_k) A u \|^2 = \| Q_k A u \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| \overline{L}_k \|^2 [\| Q_m v \|^2 + \| (P_m - P_k) A u \|^2] .$$

Отсюда, в силу условия леммы, имеем

$$\| Q_m A u \| \leqslant \| \overline{L}_k \| \| Q_m v \| \leqslant \| \overline{L}_k \| \| v \| . \tag{16}$$

С другой стороны, из (13) получаем

$$u = (J - P_m A)^{-1} Q_m v \tag{17}$$

и

$$Q_m A u = \overline{L}_m v \tag{18}$$

(существование оператора $(J - P_m A)^{-1}$ вытекает из (14), (15) и условия леммы).

Из равенства (18) получаем

$$\| Q_m A u \| \leqslant \| \overline{L}_m \| \| v \| . \tag{19}$$

В силу свойства нормы оператора, из неравенств (16), (18) и (19) окончательно имеем

$$\| \overline{L}_m \| \leqslant \| \overline{L}_k \| .$$

Теорема 4. *Если $A_n = P_n A$ или $A_n = A P_n$, существуют ограниченные обратные операторы $(J - P_i A)^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, и выполняется условие $\| \overline{L}_k \| < 1$, то итерационный процесс (2) — (3) сходится к единственному решению уравнения (1). Для оценки погрешности n-го приближения $(n \geqslant k)$ справедливы неравенства*

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \frac{\| \Omega_n \|}{1 - \| \overline{L}_n \|} \| Q_n A \delta_n \| \qquad (A_n = P_n A) , \tag{20}$$

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \frac{\| \Omega_n^* \|}{1 - \| \overline{L}_n \|} \| Q_n \delta_n \| \qquad (A_n = A P_n) . \tag{21}$$

Доказательство. Согласно формуле (6), для случаев $A_n = P_n A$ и $A_n = AP_n$ соответственно имеем

$$L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 = \Omega_n L_{n-1}^* \dots L_2^* L_1^* A,$$

$$L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 = \Omega_n^* L_{n-1}^* \dots L_2^* L_1^*,$$

где

$$L_n^* = Q_{n+1} A (J - P_n A)^{-1} Q_n.$$

Так как $Q_{n+1} Q_n = Q_{n+1}$ и $\| Q_{n+1} \| = 1$, то справедливо соотношение

$$\| L_n^* \| = \| Q_{n+1} \overline{L}_n \| \leqslant \| \overline{L}_n \|.$$

Следовательно, на основании леммы и условия теоремы, для обоих случаев соответственно получаем

$$\| L_n L_{n-1} \dots L_1 \| \leqslant \| \Omega_n \| \| \overline{L}_{n-1} \| \dots \| \overline{L}_1 \| \| A \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \Omega_n \| \| \overline{L}_k \|^{n-k-1} \| \overline{L}_{k-1} \| \dots \| \overline{L}_1 \| \| A \|;$$

$$\| L_n L_{n-1} \dots L_1 \| \leqslant \| \Omega_n^* \| \| \overline{L}_n \| \dots \| \overline{L}_1 \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \Omega_n^* \| \| \overline{L}_k \|^{n-k-1} \| \overline{L}_{k-1} \| \dots \| \overline{L}_1 \|.$$

Так как $\| \Omega_n \|$ и $\| \Omega_n^* \|$ равномерно ограничены* по n, то при $n \to \infty$

$$\| L_n L_{n-1} \dots L_1 \| \to 0$$

как для первого, так и для второго случая, т. е. выполняется условие (5) теоремы 1.

Установим теперь оценку погрешности (20). Принимая во внимание, что $L_n = (J - P_n A)^{-1} Q_n A$ представим (12) в виде

$$u^* - u_n = (J - P_n A)^{-1} Q_n [Q_n A (u^* - u_n) + Q_n A \delta_n], \tag{22}$$

$$Q_n A (u^* - u_n) = \overline{L}_n [Q_n A (u^* - u_n) + Q_n A \delta_n]. \tag{23}$$

Из (22) и (23) соответственно находим

$$\| u^* - u_n \| \leqslant \| \Omega_n \| [\| Q_n A (u^* - u_n) \| + \| Q_n A \delta_n \|], \tag{24}$$

$$\| Q_n A (u^* - u_n) \| \leqslant \| \overline{L}_n \| [\| Q_n A (u^* - u_n) \| + \| Q_n A \delta_n \|]. \tag{25}$$

Определяя $\| Q_n A (u^* - u_n) \|$ из (25) и подставляя полученный результат в (24), окончательно получаем оценку (20).

Аналогично устанавливается оценка погрешности (21).

---

*Равномерная ограниченность по n операторов Ω_n и Ω_n^* вытекает соответственно из равенств

$$\Omega_n = \Omega_k [J - (P_n - P_k) \overline{L}_k]^{-1} Q_n,$$

$$\Omega_n^* = \Omega_k^* [J - (P_n - P_k) \overline{L}_k]^{-1} Q_n,$$

которые можно получить из соотношений (13) — (15) и (17).

Замечание 1. Если $\| A_n \| < 1$, то по известной теореме Банаха получим

$$\| (J - A_n)^{-1} \| < \frac{1}{1 - \| A_n \|}, \tag{26}$$

и, поэтому,

$$\| L_n \| \leqslant \frac{\| A - A_n \|}{1 - \| A_n \|}.$$

Последняя оценка удобна при вычислениях.

Замечание 2. К уравнению вида (1) приводится более общее уравнение

$$Hu = g + Bu, \tag{27}$$

где H и B — линейные операторы, переводящие элементы банахова пространства E в элементы банахова пространства F, g — известный элемент пространства F и u — искомый элемент пространства E, в предположении, что существует обратный оператор H^{-1}. В этом случае $f = H^{-1} g$, $A = H^{-1}B$. Однако же для приближенного решения уравнения (27) приведение последнего к виду (1) не является необходимым и метод можно применять непосредственно к уравнению (27), строя последовательные приближения по формуле

$$Hu_n = g + Bu_{n-1} + \alpha_n, \tag{28}$$

где

$$\alpha_n = B_n \delta_n, \quad \delta_n = u_n - u_{n-1} \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Здесь операторы B_n переводят элементы пространства E в элементы пространства F или же в элементы подпространств $F^{(n)}$ пространства F.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \frac{3}{5} x + x^2 - \frac{3}{5} x^5 - 12 \int_0^1 G(x, \xi) \xi \, u(\xi) \, d\xi, \tag{30}$$

где

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi (1 - x) & \text{при } \xi \leqslant x, \\ x (1 - \xi) & \text{при } \xi \geqslant x, \end{cases}$$

имеющее решение $u(x) = x^2$.

В данном случае имеем

$$f = f(x) = \frac{3}{5} x + x^2 - \frac{3}{5} x^5,$$

$$Au = -12 \int_0^1 G(x, \xi) \xi \, u(\xi) \, d\xi.$$

В качестве операторов A_n возьмем

$$A_n u = -12 \int_0^1 K_n(x, \xi) u(\xi) \, d\xi,$$

где $K_n(x, \xi)$ — отрезок ряда Фурье для функции $G(x, \xi)\xi$ по ортонормированным на отрезке [0,1] полиномам Лежандра, состоящий из n членов ($n = 1, 2, \ldots$).

В частности,

$$K_1(x, \xi) = \frac{1}{6}(x - x^3),$$

$$K_2(x, \xi) = \frac{1}{6}(x - x^3) + \frac{1}{2}(x^3 - x^4)(2\xi - 1).$$

Применяя рассмотренный алгорифм к уравнению (30), исходя из $u_0 = 0$, получаем в 1-м приближении

$$u_1(x) = \frac{3}{5}x + x^2 - \frac{3}{5}x^5 - 12\alpha_1(x),$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{6}(x - x^3)\int_0^1 u_1(\xi)\,d\xi.$$

Отсюда

$$u_1(x) = -\frac{1}{9}x + x^2 + \frac{32}{45}x^3 - \frac{3}{5}x^5.$$

Во 2-м приближении имеем

$$u_2(x) = \frac{3}{5}x + x^2 - \frac{3}{5}x^5 - 12\int_0^1 G(x, \xi)\,\xi u_1(\xi)\,d\xi - 12\alpha_2(x),$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{6}\int_0^1 \{(x - x^3) + 3(x^3 - x^4)(2\xi - 1)\}\,[u_2(\xi) - u_1(\xi)]\,d\xi.$$

Проделав соответствующие вычисления, получим

$$u_2(x) = 0{,}00224x + x^2 + 0{,}05753x^3 - 0{,}21564x^4 + 0{,}28444x^6 - 0{,}12857x^8.$$

Погрешность 1-го приближения $u_1(x)$ в точке $x = \frac{1}{2}$ составляет приблизительно 5,8%, а погрешность 2-го приближения в той же точке составляет приблизительно 0,5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Соколов, Про один метод наближеного розв'язання лінійних інтегральних та диференціальних рівнянь, ДАН УРСР, № 2, 1955.
2. Ю. Д. Соколов, О методе осреднения функциональных поправок, УМЖ, т. IX, № 1, 1957.
3. Е. А. Чернишенко, Про один варіант методу осереднення, ДАН УРСР, № 1, 1956.
4. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
5. Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, УМН, т. III, вып. 6, 1948.

Поступила 21.V 1962 г.
Киев