Замечание о ΠC-изоморфизме R-групп, локально удовлетворяющих условию (N)

К. М. Кутыев

В статье рассматриваются группы с изоморфными структурами подполугрупп. Интерес к группам, обладающим изоморфными структурами подполугрупп, возник в связи с вопросом, поставленным А. Г. Курошем [1], о возможности однозначной характеристики группы с помощью некоторой структуры, связанной с группой и не являющейся структурой подгрупп. Группы с изоморфными структурами подполугрупп изучались Р. В. Петропавловской [2], А. С. Пекелис [3] и автором [4].

В настоящей заметке доказывается, что R-группа, локально удовлетворяющая условию (N), определяется структурой своих подполугрупп. Этот результат можно рассматривать как новое доказательство аналогичного факта, установленного в заметке [3] для локально нильпотентных групп без кручения. Доказательство получается коротким и прозрачным, если опираться на работу Р. В. Петропавловской и теорему Скотта, опубликованную одновременно с заметкой А. С. Пекелис [3]. Оно основывается на двух фактах, имеющих место в локально нильпотентной группе G без кручения. Во-первых, в группе G максимальная локально циклическая подгруппа изолирована. Во-вторых, в группе G выполняется условие (N). Первый факт не является характерным для локально нильпотентных групп, так как он имеет место в любой R-группе. Неизвестно, насколько сильным является второе ограничение, так как неизвестно, будет ли локально нильпотентной R-группа, локально удовлетворяющая условию (N). Поэтому естественно проводить доказательство для R-группы, локально удовлетворяющей условию (N). Автор оставляет в стороне вопрос о том, будет ли рассматриваемый класс групп шире, чем класс локально нильпотентных групп без кручения.

Введем необходимые определения.

1. Пусть между элементами групп G и G^{φ} установлено взаимно однозначное соответствие φ. Элементу $g \in G$ соответствует элемент $\varphi(g) \in G^{\varphi}$. Будем говорить, что элементы $a,\ b \in G$ прямо (обратно) φ-параллельны, если $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ (соответственно, если $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$). Если элементы a, b либо прямо, либо обратно φ-параллельны, то они называются φ-параллельными. Наконец, если элементы a, b (прямо, обратно) φ-параллельны и элементы b, a (прямо, обратно) φ-параллельны, то они называются взаимно (соответственно прямо, обратно) φ-параллельными.

2. Элементы a и b из группы G назовем отделимыми подгруппой H, если элемент b принадлежит H, элемент a принадлежит нормализатору $N(H)$ подгруппы H и пересечение подгруппы H с циклической подполугруппой $\{a\}$ пусто.

Элементы a и b из группы G назовем отделимыми, если существует такая подгруппа H, что a и b отделимы подгруппой H.

Если элементы a, b отделимы и отделимы также элементы b, a, то элементы a и b называются взаимно отделимыми.

3. Говорят, что группа без кручения удовлетворяет условию (N), если для любой пары ее подгрупп A и B из того, что A максимальная изолированная подгруппа в B следует, что A инвариантна в B ([5], стр. 211).

Пусть $P(G)$ — структура всех подполугрупп группы G, а $P(G^\varphi)$—структура всех подполугрупп группы G^φ. (Пустое множество считается подполугруппой всякой полугруппы). В заметке рассматриваются две группы G и G^φ, у которых структуры подполугрупп $P(G)$ и $P(G^\varphi)$ изоморфны. Изоморфизм структуры $P(G)$ на структуру $P(G^\varphi)$ называется подполугрупповым структурным изоморфизмом (*ПС*-изоморфизмом [4]) групп G и G^φ и обозначается буквой φ. Пусть $\{a, b, \ldots, g\}$ означает подполугруппу в группе G, порожденную элементами $a, b, \ldots, g$. Через $\{a, b, \ldots, g\}^\varphi$ или A^φ обозначим образ подполугруппы $\{a, b, \ldots, g\}$, соответственно подполугруппы A, в группе G^φ при *ПС*-изоморфизме φ. Пусть группа G без кручения, тогда на основании 1.7 ([2], стр. 66) группа G^φ — также группа без кручения. Согласно 2.12 ([6], стр. 593) бесконечная циклическая подполугруппа определяется структурой своих подполугрупп. Поэтому между элементами групп G и G^φ можно установить взаимно однозначное соответствие φ следующим образом: элементу $g \in G$ поставим в соответствие элемент $\varphi(g) \in G^\varphi$, так что $\{\varphi(g)\} = \{g\}^\varphi$. Ввиду этого будем считать, что *ПС*-изоморфизм групп G и G^φ устанавливает между элементами групп G и G^φ указанное взаимно однозначное соответствие φ. Если для каждой подполугруппы S группы G $S^\varphi = \varphi(S)$, где $\varphi(S)$ множество образов всех элементов полугруппы S при отображении φ, то будем говорить, что *ПС*-изоморфизм φ есть следствие отображения φ (2.8, [2], стр. 71). Наконец, ввиду теоремы 2.9 ([2], стр. 71), если абелева группа G без кручения *ПС*-изоморфна группе G^φ, то *ПС*-изоморфизм φ есть следствие изоморфизма или антиизоморфизма групп G и G^φ. Поэтому при *ПС*-изоморфизме произвольной группы G без кручения на группу G^φ перестановочные элементы a и b из группы G φ-параллельны.

Из работы [2] вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть φ — ПС-изоморфизм групп G и G^φ. Если в группе G без кручения элемент ab не может быть представлен в виде произведения конечного числа положительных степеней элементов a и b, кроме произведения ab и, быть может, произведения ba, то элементы a, b φ-параллельны.*

Доказательство. *ПС*-изоморфизм групп G и G^φ индуцирует *ПС*-изоморфизм подполугрупп $\{a, b\} \subset G$ и $\{a, b\}^\varphi \subset G^\varphi$. Элемент $ab \in G$ не имеет другой записи в виде произведения конечного числа положительных степеней элементов a и b, кроме произведения ab и, быть может, произведения ba, поэтому в подполугруппе $\{a, b\}$, на основании леммы 4.5 ([6], стр. 596), элемент ab является «максимальным» для элементов a и b. (Определение «максимального» элемента см. в 4.3 ([6], стр. 596.) Как было отмечено, *ПС*-изоморфизм групп G и G^φ устанавливает взаимно однозначное соответствие φ между элементами групп G и G^φ такое, что $\{a\}^\varphi = \{\varphi(a)\}$, $\{b\}^\varphi = \{\varphi(b)\}$ и $\{ab\}^\varphi = \{\varphi(ab)\}$. Поэтому согласно теореме 4.6 ([6], стр. 597), элемент $\varphi(ab)$ в подполугруппе $\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ является «максимальным» для элементов $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$. Далее, на основании леммы 4.4 ([6], стр. 596), получим либо $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, либо $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$.

Лемма. 2. *Пусть φ — ПС-изоморфизм группы G без кручения на группу G^φ, тогда взаимно отделимые элементы a, b взаимно φ-параллельны.*

Доказательство. Пусть элементы a и b взаимно отделимы, тогда в любой записи элемента ab в виде произведения конечного числа положительных степеней элементов a и b каждый из элементов a и b встречается не более одного раза. Действительно, если предположить, например, что элемент a встречается n раз ($n > 1$), то пользуясь тем, что элементы a и b отделимы подгруппой H, получим: $ab = a^n h$, где $h \in H$ и $a^{n-1} = bh^{-1} \in H$, что противоречит отделимости элементов a и b подгруппой H. Таким образом, элемент ab не может быть представлен в виде произведения конечного числа положительных степеней элементов a и b, кроме произведения ab и, быть может, произведения ba, поэтому, согласно лемме 1, элементы a и b φ-параллельны. Аналогично получим, что элементы b, a φ-параллельны. Следовательно, элементы a и b взаимно φ-параллельны.

Лемма. 3. *Если в R-группе G выполняется условие (N), то неперестановочные элементы a и b из группы G взаимно отделимы.*

Доказательство. Пусть $I(b)$ — максимальная локально циклическая подгруппа, содержащая элемент b. Если a и b—неперестановочные элементы, то $a \in I(b)$. В R-группе G максимальная локально циклическая подгруппа изолирована ([7], стр. 79), поэтому подгруппа $I(b)$ изолирована в группе G. Подгруппа $I(b)$ изолирована в подгруппе H, порожденной элементом a и подгруппой $I(b)$ (так как подгруппа $I(b)$ изолирована во всякой подгруппе группы G, содержащей подгруппу $I(b)$). Пусть B — максимальная изолированная в H подгруппа, содержащая $I(b)$ и не содержащая a. Легко видеть, что B — максимальная собственная изолированная подгруппа в H, и, ввиду условия (N), она инвариантна в H. Поэтому элемент a принадлежит нормализатору $N(B)$ подгруппы B и пересечение $\{a\} \cap B$ пусто, т. е. элементы a, b отделимы. Аналогично доказывается, что элементы b, a отделимы.

Теорема. *Если группы G и G^{φ} обладают изоморфными структурами подполугрупп и R-группа G обладает локальной системой подгрупп с условием (N), то группы G и G^{φ} изоморфны и изоморфизм структур подполугрупп групп G и G^{φ} является следствием изоморфизма или антиизоморфизма групп G и G^{φ}.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для R-группы G с условием (N). В работе [8] на стр. 1141 доказана теорема 1, которую приведем для удобства читателя: «Каждый полуизоморфизм полугруппы с сокращением H на полугруппу с сокращением H' является или изоморфизмом или антиизоморфизмом». В этой теореме «полуизоморфизмом» называется взаимно однозначное отображение φ элементов полугруппы H на элементы полугруппы H' такое, что любые два элемента из H φ-параллельны. В нашем случае условия цитируемой теоремы выполнены.

Действительно, как было отмечено, из работы [2] следует, что любые два перестановочных элемента из группы G φ-параллельны. На основании леммы 3, любые два неперестановочные элемента из группы G взаимно отделимы и, согласно лемме 2, φ-параллельны.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, М.—Л., 1944.
2. Р. В. Петропавловская, Об определяемости группы структурой ее подсистем, Матем. сб., т. 29 (71), 1951, 63—78.
3. А. С. Пекелис, О группах с изоморфными структурами подполугрупп, Изв. вузов, математика, № 1, 1957, 189—193.
4. К. М. Кутыев, *ПС*-изоморфизмы частично упорядоченных локально нильпотентных групп, УМН, т. XI, вып. 2 (68), 1956, 193—198.
5. Б. И. Плоткин, К теории некоммутативных групп без кручения, Матем. сб., т. 30 (72), 1952, 157—212.
6. Р. В. Петропавловская, Структурные изоморфизмы свободных ассоциативных систем, Матем. сб., т. 28 (70), 1951, 589—602.
7. П. Г. Конторович, Группы с базисом расщепления, III, Матем. сб., т. 22 (64), 1948, 79—100.
8. W. R. Scott, Half-homorphisms of groups, Proc. Am. Math. Soc., v. 8, № 6, 1957, 1141—1144.

Поступила 10.I 1961 г.
Свердловск