Об одной теореме типа Тамаркина и ее применении ко второй основной задаче плоской теории упругости

Е. Н. Парасюк

В настоящей заметке речь идет о теореме, являющейся распространением известной теоремы Тамаркина [1] на некоторый класс сингулярных интегральных уравнений. Эта теорема находится также в тесной связи с известной теоремой И. Ц. Гохберга [2], не являясь, однако, следствием последней.

Пусть имеем некоторое интегральное уравнение с параметром λ, принимающим, вообще говоря, и комплексные значения:

$$u(x, \lambda) - \int_S K(x, y, \lambda)\, u(y, \lambda)\, d_y S = f(x, \lambda), \tag{1}$$

где S — некоторая поверхность.

Предполагается, что интегральный оператор K_λ:

$$K_\lambda u(x, \lambda) = \int_S K(x, y, \lambda)\, u(y, \lambda)\, d_y S \quad (x \in S)$$

действует в некотором банаховом пространстве B и ограничен в этом пространстве.

Теорема. *Если для уравнения* (1) *выполнены условия:*

а) *ядро* $K(x, y, \lambda)$ *и функция* $f(x, \lambda)$ — *суть аналитические функции параметра* λ *в некоторой области* D λ-*плоскости,*

б) *ядро* $\dfrac{\partial K(x, y, \lambda)}{\partial \lambda}$ — *того же типа, что и ядро* $K(x, y, \lambda)$, *в частности, интегральный оператор с таким ядром ограничен в* B,

в) *при каждом* $\lambda \in D$ *уравнение* (1) *однозначно разрешимо,*

то каждое решение уравнения (1) *при* $\lambda \in D$ *является аналитической функцией параметра* λ *в области* D.

Очевидно, для доказательства этой теоремы, достаточно показать, что при любом $\lambda \in D$ существует производная $\dfrac{\partial u(x, \lambda)}{\partial \lambda}$, или что функция

$$u_1(x, \lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} v(x, \xi)\, d\xi + u(x, \lambda_1)$$

совпадает с функцией $u(x, \lambda)$. Здесь через $v(x, \lambda)$ обозначено решение уравнения

$$v(x, \lambda) - \int_S K(x, y, \lambda)\, v(y, \lambda)\, d_y S = f_1(x, \lambda),$$

где

$$f_1(x, \lambda) = \int_S \frac{\partial K(x, y, \lambda)}{\partial \lambda}\, u(y, \lambda)\, d_y S + \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda},$$

λ_1 — некоторая фиксированная точка области D.

Обозначив

$$w(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) - u(x, \lambda),$$

легко получаем, что функция $w(x, \lambda)$ является решением уравнения

$$w(x, \lambda) - \int_S K(x, y, \lambda)\, w(y, \lambda)\, d_y S + \int_{\lambda_1}^{\lambda} d\xi \int_S \frac{\partial K(x, y, \xi)}{\partial \xi}\, w(y, \xi)\, d_y S = 0.$$

Если выбрать λ достаточно близким к λ_1, то отсюда будет следовать, что $w(x, \lambda) = 0$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение для второй основной задачи (типа Дирихле) плоской теории упругости. Согласно [3] оно имеет вид

$$u(x) + \int_{\Gamma} G(x-y, \nu(y))\, u(y)\, d_y S = f(x), \tag{2}$$

где

$$G(x-y, \nu(y)) = \frac{(x-y, \nu(y))}{\pi} \left\{ \frac{1-\varkappa}{|x-y|^2} E + 2\varkappa \frac{(x-y)(x-y)'}{|x-y|^4} \right\}.$$

Кроме того, здесь обозначено

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad |x-y| = +\sqrt{(x-y, x-y)} =$$
$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2},$$

$\nu(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к Γ в точке y, E — единичная матрица порядка 2, $\varkappa = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}$, где λ и μ — постоянные Ляме. С помощью штриха здесь обозначен знак транспонирования.

Относительно контура Γ будем предполагать, что он содержит конечное число угловых точек, отличных от точек заострения, и что эти точки делят его на части, удовлетворяющие условиям Ляпунова. Следовательно, уравнение (2), вообще говоря, нерегулярно.

Рассматривая уравнение (2) и при комплексных значениях параметра $\varkappa$, покажем, что к нему может быть применена доказанная выше теорема.

Прежде всего, как следует из [4], интегральный оператор, входящий в (2), ограничен в пространстве L_ε с нормой

$$\|u\| = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma} r^{-\varepsilon}(x)\, |u_k(x)|\, d_x S,$$

где $r(x)$ — расстояние точки $x \in \Gamma$ до ближайшей угловой точки контура Γ, $0 < \varepsilon < 1$.

Далее, согласно [5], индекс уравнения (2) равен нулю. Учитывая этот факт, из [3] легко получаем, что уравнение (2) однозначно разрешимо в круге $|\varkappa| < 1$.

Нетрудно проверить, что и условие б) для уравнения (2) тоже выполняется.

Следовательно, решение уравнения (2) представляет собой аналитическую функцию параметра $\varkappa$ в круге $|\varkappa| < 1$.

Это дает возможность расширить рамки применимости метода, предложенного в [3], на случай областей, допускающих наличие угловых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Tamarkin, On Fredholm's integral equations whose kernels are analytics in a parameter, Ann. Math., v. 28, № 2, 1927, 127—152.
2. И. Ц. Гохберг, О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, ДАН СССР, **78**, 1951, 629—632.
3. Я. Б. Лопатинский, Об одном методе решения второй основной задачи плоской теории упругости, Теор. и прикл. матем., вып. I, Изд-во Львовск. ун-та, 1958, 23—27.
4. Я. Б. Лопатинський, Про один тип сингулярних інтегральних рівнянь, Теор. і прикл. матем., вип. II, Вид-во Львівськ. ун-ту, 1963, 53—57.
5. Е. Н. Парасюк, Об индексе интегрального оператора, соответствующего второй основной задаче плоской теории упругости, УМЖ, т. XVI, № 2, 1964, 250—253.

Поступила 11.V 1964 г.
Львов