О треугольном подобии треугольных матриц

С. С. Поляк

Каждую квадратную матрицу над произвольным полем K можно привести к нормальной форме Фробениуса (обобщенной жордановой форме). Следовательно, в каждом классе сопряженных элементов полной линейной группы $GL(n, K)$ естественным образом выделяется один представитель — нормальная форма Фробениуса, к которой приводятся все матрицы этого класса. В настоящей заметке рассматривается задача о выборе системы представителей классов сопряженных элементов группы H_n треугольных матриц порядка n над полем K. Индуктивно строим нормальную форму треугольной матрицы. Нормальная форма — это треугольная матрица, клетки которой заполнены крестами (знак $+$), либо являются пустыми. Система представителей классов сопряженных элементов группы H_n получается, если в нормальных формах клетки с крестами всевозможными способами заполнить ненулевыми элементами из поля K, а в пустых клетках проставить нули. Указывается также алгоритм, позволяющий описать все такие нормальные формы. Отметим, что нормальные делители группы H_n описаны в [1], а некоторые классы сопряженных элементов этой группы — в [2].

Элементы группы H_n состоят из верхних треугольных матриц вида $E + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}e_{ij}$, где $a_{ij} \in K$, E — единичная матрица n-го порядка, e_{ij} — матрица n-го порядка с единицей на пересечении i-й строки и j-го столбца и с нулями в остальных клетках.

Пусть заданы две треугольные матрицы $A = E + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}e_{ij}$ и $B = E + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}e_{ij}$. Будем говорить, что матрицы $A, B \in H_n$ треугольно подобны и употреблять для этого обозначение $A \sim B$, если матрицы A и B принадлежат одному классу сопряженных элементов группы H_n, т. е. если существует такая матрица $X = E + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij}e_{ij}$, что

$$XA = BX. \tag{1}$$

Пусть $A \sim B$. Из (1) с учетом того, что

$$e_{ij} \cdot e_{kr} = \begin{cases} e_{ir}, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

получаем (так же, как и в [2] при нахождении нормализатора матрицы A)

$$\sum_{q=1}^{n-2} \sum_{j=q+2}^{n} \left[\sum_{i=q+1}^{j-1} (a_{ij}x_{qi} - b_{qi}x_{ij} + a_{qj} - b_{qj})\, e_{qj} + \sum_{r=1}^{n-1} (a_{r,r+1} - b_{r,r+1})\, e_{r,r+1} = 0. \right. \tag{2}$$

Ввиду линейной независимости матриц e_{ij} из последнего равенства вытекает

$$\sum_{i=q+1}^{j-1} (a_{ij}x_{qi} - b_{qi}x_{ij} + a_{qj} - b_{qj}) = 0, \tag{3}$$

$$a_{r,r+1} - b_{r,r+1} = 0 \tag{4}$$

для всех $r = 1, \ldots, n-1$; $q = 1, \ldots, n-2$; $j = q+2, \ldots, n$

Таким образом, необходимым условием треугольного подобия матриц A и B являются: 1) совпадение элементов матриц A и B над главной диагональю и 2) наличие хотя бы одного решения системы уравнений (3). Нетрудно видеть, что эти условия являются в то же время и достаточными для треугольного подобия матриц A и B.

Исследуем систему (3). Если положить

$$A_{ij}=\left\|\begin{matrix} a_{ij} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{i,j+1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{in} & a_{i+1,n} & \ldots & a_{n-1,n} & 0 \end{matrix}\right\|; \quad B_{ij}(n-i-1, n-j)=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -b_{ij} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -b_{ij} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -b_{ij} \end{matrix}\right\|,$$

где $n-i-1$ — число строк, а $n-j$ — число столбцов матрицы $B_{ij}(n-i-1, n-j)$, то матрицу системы (3) можно записать так:

$$M=\left\|\begin{matrix} A_{23} & B_{12}^{(n-2,\, n-2)} & \ldots & B_{1,\, n-1}^{(n-2,\, 1)} \\ & A_{31} & \ldots & B_{2,\, n-1}^{(n-3,\, 1)} \\ 0 & & \ldots & \ldots \\ & & A_{n-1,n} & B_{n-2,\, n-1}^{(1,\, 1)} \end{matrix}\right\|.$$

Заметим, что матрица M не зависит от элементов последнего столбца матрицы B. Пусть теперь $D_i=\left\|\begin{matrix} a_{i,i+} - b_{i,i+2} \\ \ldots \\ a_{i,n} - b_{i,n} \end{matrix}\right\|$, где $i=1,\ldots,n-1$. Тогда расширенная матрица системы (3) записывается в виде $MD=\left\|\begin{matrix} & D_1 \\ M & \vdots \\ & D_{n-2} \end{matrix}\right\|$. Следовательно, имеет место теорема.

Теорема 1. *Матрицы $A, B \in H_n$ тогда и только тогда треугольно подобны, когда одновременно выполняются соотношения*

$$a_{r,r+1}-b_{r,r+1}=0,$$
$$R(M)=R(MD), \tag{5}$$

где $R(M)$ — ранг матрицы M, $r=1,\ldots,n-1$.

Обозначим через $A[a]$ матрицу $\left\|\begin{matrix} A & a \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$, где $a=\left\|\begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{matrix}\right\|$, $A \in H_{n-1}$, $a_{ij} \in K$. Нетрудно видеть, что из соотношения $A \cdot\!\!\vdash B$ вытекает соотношение $A[a] \dashv\!\vdash B[b]$ для любых столбцов a и b.

Предположим, что $A \sim B$. Рассмотрим множества $\{A[a]\}$ и $\{B[b]\}$, где каждое из $a_{1n},\ldots,a_{n-1,n}, b_{1n},\ldots,b_{n-1,n}$ пробегает независимо элементы поля K. Легко доказывается следующая лемма.

Лемма. *Для каждой матрицы $A_1 \in \{A[a]\}$ найдется треугольно подобная ей матрица $B_1 \in \{B[b]\}$ и наоборот.*

Введем следующие обозначения для элементов матриц из группы H_n. Клетку над главной диагональю будем заполнять крестом или будем оставлять пустой в зависимости от того, расположен ли в ней или нет отличный от нуля элемент из поля K. Назовем матрицу $\|1\|$ нормальной формой 1-го порядка для группы H_1. Сделаем индуктивное предположение. Пусть для группы H_{n-1} уже построены нормальные формы — треугольные матрицы, клетки которых являются пустыми либо заполнены крестами, причем замена всевозможными способами крестов ненулевыми элементами из поля K, а пустых клеток нулями дает систему представителей классов сопряженных элементов группы H_{n-1}. Покажем, как построить нормальные формы для группы H_n. Пусть схема $A^{(n-1)}$ — нормальная форма n — 1-го порядка. Клетку (j, n) треугольной матрицы n-го порядка назовем пустым или непустым углом по отношению к схеме $A^{(n-1)}$ в зависимости от того, расположен или нет в каком-нибудь столбце схемы $A^{(n-1)}$ в j-ой строке крест, выше которого нет других крестов. Под $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ будем понимать треугольную матрицу с крестами и пустыми клетками, в левом верхнем углу которой расположена схема $A^{(n-1)}$, а в последнем столбце все клетки, кроме непустых углов $(\alpha_1, n), \ldots, (\alpha_s, n)$, где находятся кресты, пустые.

Определение. Схему $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ будем называть нормальной формой n-го порядка, если для произвольной, но фиксированной матрицы $A[a] \in H_n$ типа $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$*, $A[a] \frac{\;}{\;\!\!|}\!\!\sim A[b]$, где $A[b]$ — любая матрица типа $A^{(n-1)}(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, причем: 1) $k < s$, 2) в случае $k = s$ $\alpha_i \geqslant \beta_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ и хотя бы для одного индекса j $(1 \leqslant j \leqslant s)$ $\alpha_j > \beta_j$.

Теорема 2. *Если $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ — нормальная форма n-го порядка, то для любой матрицы $A[c] \in H_n$ типа $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ имеет место соотношение $A[c] \not\sim A[b]$, где $A[b] \in H_n$ — матрица типа $A^{(n-1)}(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ и $k < s$, или $k = s$, $\alpha_i \geqslant \beta_i$ и хотя бы для одного индекса $j (1 \leqslant j \leqslant s)$ $\alpha_j > \beta_j$.*

Доказательство. В случае $c_{n-1,n} \neq b_{n-1,n}$ теорема очевидна. Пусть $c_{n-1,n} = b_{n-1,n}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $R(M) \neq R(MD_c)$. Пусть m — такое число, что $c_{m,n} \neq 0$, а $b_{m,n} = 0$. Легко видеть, что такое число существует: в случае $k < s$ $k < m \leqslant s$, а если $k = s$, то $m = j$, где j — такой индекс, что $\alpha_j > \beta_j$. Очевидно, что $a_{m,n} \neq 0$.

Пусть $MD_a = \left\| \begin{matrix} M_1 & \mu_1 \\ \gamma & a_{m,n} \\ M_2 & \mu_2 \end{matrix} \right\|$. Из того, что $A[a] \not\sim A[b]$ на основании теоремы 1 вытекает соотношение $R(MD_a) = R(M) + 1$, и, следовательно, путем элементарных преобразований матрицу MD_a можно привести к виду $\left\| \begin{matrix} N & 0 \\ 0 & x \end{matrix} \right\|$, где $x \neq 0$, а $R(M) = R(N)$. Более того, покажем, что, прибавляя к строке $(\gamma\, a_{m,n})$ линейную комбинацию строк матрицы $M_1\, \mu_1$, матрицу MD_a можно привести к виду $\left\| \begin{matrix} M_1 & \mu_1 \\ 0 & a_{m,n} \\ M_2 & \mu_2 \end{matrix} \right\|$.

Рассмотрим строку

$$(\gamma\, a_{m,n}) = (0 \ldots 0 b_{m+1,n} \ldots b_{n-1,n} 0 \ldots 0 a_{m,m+1} 0 \ldots 0 a_{m,m+2} 0 \ldots 0 a_{m,n-1}\, a_{m,n}).$$

Если все элементы этой строки, за исключением элемента $a_{m,n}$, равны нулю, то наше утверждение справедливо. Пусть некоторые из элементов рассматриваемой строки отличны от нуля. Легко видеть, что над каждым ненулевым элементом этой строки в матрице MD_a имеются другие ненуле-

* Т. е. матрицы, получающейся из схемы $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ в результате заполнения клеток с крестами ненулевыми элементами из поля K, а пустых клеток — нулями.

вые элементы. Действительно, если бы над элементом $a_{m,r}$ не было отличного от нуля элемента, то, как видно из строения матрицы $A[a]$, угол (m, n) был бы пустым, что противоречит предположению. Если $m < \alpha_s$, то предположение, что над некоторым из ненулевых элементов $b_{m+1,n} \dots b_{n-1,n}$ расположены только нули приводит к противоречию. В самом деле, тогда найдется такое число $\alpha_r > m$, что преобразование с помощью матрицы $E + \frac{a_{m,n}}{a_{\alpha_r,n}} e_{m,\alpha_r}$ переводит матрицу $A[a]$ в матрицу с нулем в клетке (m,n), что невозможно. Случай же $m \geqslant \alpha_s$ исключается, так как тогда все числа $b_{m+1,n}, \dots, b_{n-1,n}$ должны быть равны нулю. Пусть γ_1 — такая строка матрицы MD_a, что удовлетворяются условия: 1) γ_1 содержит над элементом $a_{m,r}$ строки $(\gamma\, a_{m,n})$ отличный от нуля элемент a_{i_r}, 2) выше строки γ_1 нет строк, удовлетворяющих условию 1). Очевидно, что справа от элемента a_{i_r} в строке γ_1 расположены одни нули (это элементы пустых углов). Если и слева от элемента a_{i_r} расположены одни нули, то, умножая строку γ_1 на некоторое число и прибавляя ее к строке $(\gamma\, a_{m,n})$, мы получим на месте ненулевого элемента $a_{m,r}$ нуль, не изменяя остальных элементов строки $(\gamma\, a_{m,n})$. Это имеет место для каждого ненулевого элемента строки $(\gamma\, a_{m,n})$, за исключением элемента $a_{m,n}$. Если же слева от элемента $a_{i,r}$ в строке γ_1 имеются отличные от нуля элементы, то над каждым из них в матрице MD_a также расположены отличные от нуля элементы. Действительно, в противном случае на месте элемента $a_{i,r}$ матрицы $A[a]$ должен быть нуль, или существует такое преобразование $S \in H_{n-1}$, что матрица $S^{-1}AS$ в клетке (i, r) содержит нуль, а все остальные элементы совпадают соответственно с элементами матрицы A, что невозможно, так как A — матрица, записанная в нормальной форме, и т. д. Следовательно, прибавляя к строке $(\gamma\, a_{m,n})$ линейную комбинацию других строк матрицы $M_1\mu_1$, приведем матрицу $\begin{Vmatrix} M_1 & \mu_1 \\ \gamma & a_{m,n} \\ M_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}$ к виду $\begin{Vmatrix} M_1 & \mu_1 \\ 0 & a_{m,n} \\ M_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}$. При этом, как легко видеть, $R(M) = R\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$. Так как $a_{m,n} \neq 0$, то матрицу $\begin{Vmatrix} M_1 & \mu_1 \\ 0 & a_{m,n} \\ M_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}$ можно привести к виду $\begin{Vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & a_{m,n} \\ M_2 & 0 \end{Vmatrix}$.

Рассмотрим теперь матрицу $MD_c = \begin{Vmatrix} M_1 & \xi_1 \\ \gamma & c_{m,n} \\ M_2 & \xi_2 \end{Vmatrix}$. Проделав над ней такие же преобразования, как и над матрицей MD_a, приведем ее к виду $\begin{Vmatrix} M_1 & \xi_1 \\ 0 & c_{m,n} \\ M_2 & \xi_2 \end{Vmatrix}$. Так как $c_{m,n} \neq 0$, то последнюю матрицу можно привести к виду $\begin{Vmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & c_{m,n} \\ M_2 & 0 \end{Vmatrix}$. Легко видеть, что ранг полученной матрицы равен $R\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} + 1$, т. е. $R(MD_c) = R(M) + 1$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Треугольные матрицы* $A[a]$ и $A[b]$ *соответственно типов* $A^{(n-1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ *и* $A^{(n-1)}(\beta_1, \dots, \beta_k)$, *где матрица* $A \in H_{n-1}$ *имеет тип* $A^{(n-1)}$, *а* $A^{(n-1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ *и* $A^{(n-1)}(\beta_1, \dots, \beta_k)$ — *нормальные формы* n*-го порядка, треугольно подобны тогда и только тогда, когда:* 1) $s = k$, 2) $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, \dots, s)$, 3) $a_{\alpha_i,n} = b_{\alpha_i,n}$ $(i = 1, \dots, s)$.

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость. Первые два условия вытекают из определения нормальной формы. Пусть для матриц $A[a]$ и $A[b]$ типов $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ и $A^{(n-1)}(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ $a_{\alpha_j,n} = b_{\alpha_j,n}$, где $j = t+1, \ldots s$, но $a_{\alpha_t,n} \neq b_{\alpha_t,n}$. Докажем, что в этом случае $A[a] \nsim A[b]$. Предположим обратное. Пусть существует треугольное преобразование, переводящее матрицу $A[a]$ в матрицу $A[b]$. В таком случае согласно теореме 1 $R(M) = R(MD_b)$. Отсюда следует, что имеет место соотношение

$$\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_s m_s = D_b, \tag{6}$$

где $m_1, \ldots, m_s$, D_b — столбцы матрицы MD_b. Пусть μ — такое число, что

$$\mu\,(a_{\alpha_t,n} - b_{\alpha_t,n}) = a_{\alpha_t,n}. \tag{7}$$

Существование такого числа вытекает из того, что $a_{\alpha_t,n} - b_{\alpha_t,n} \neq 0$. Умножим обе части соотношения (6) на μ:

$$\mu\lambda_1 m_1 + \ldots + \mu\lambda_s m_s = \mu D_b; \tag{8}$$

$a_{\alpha_t,n}$ — самый нижний, отличный от нуля элемент столбца μD_b. Имеем $\mu\,(a_{\alpha_i,n} - b_{\alpha_i,n}) = a_{\alpha_i,n} + (\mu - 1)\,a_{\alpha_i,n} - \mu b_{\alpha_i,n} = a_{\alpha_i,n} - [\mu b_{\alpha_i,n} - (\mu-1)\,a_{\alpha_i,n}]$. Положим

$$c_{r,n} = \begin{cases} \mu b_{\alpha_i,n} - (\mu - 1)\,a_{\alpha_i,n}, & \text{если } r = \alpha_i,\ i = 1, \ldots, t; \\ a_{\alpha_i,n}, & \text{если } r = \alpha_i,\ i = t+1, \ldots, s; \\ 0, & \text{если } r \neq \alpha_i,\ i = 1, \ldots, s. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу $A[c]$. Покажем, что $A[a] \sim A[c]$. Матрица M не зависит от элементов последнего столбца матрицы $A[c]$. Поэтому для доказательства подобия матриц $A[a]$ и $A[c]$ достаточно показать, что $R(M) = R(MD_c)$. Ввиду того что $R(M) = R(MD_b)$, из (8) вытекает равенство $R(\mu \cdot M) = R(\mu \cdot M\ \mu \cdot D_b)$. Но $\mu D_b = D_c$ и, кроме того $R(\mu \cdot M) = R(M)$, $R(\mu \cdot MD_c) = R(MD_c)$. Таким образом, $R(M) = R(MD_c)$ и, следовательно, $A[a] \sim A[c]$. По предположению $A[a]$ — матрица типа $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, и поэтому не существует преобразования, с помощью которого можно было бы уменьшить число отличных от нуля элементов в ее последнем столбце с сохранением в неизменном виде левого верхнего угла A. В то же время ввиду (7), $c_{\alpha_t,n} = 0$ и, следовательно, число крестов в последнем столбце матрицы $A^{(n-1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ можно уменьшить. Мы получили противоречие, доказывающее теорему.

Замечание 1. Если из определения нормальной формы исключить условие 2), то теорема 3 будет уже несправедливой.

Действительно, пусть дана нормальная форма восьмого порядка

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & + & & \\ & 1 & & + & & & & \\ & & 1 & & + & & & \\ & & & 1 & & & & + \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & + \\ & & & & & & 1 & + \\ & & & & & & & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим матрицы A (5, 6) и A (5,7). Легко видеть, что обе эти матрицы удовлетворяют условию 1) в определении нормальной формы. И тем не менее эти две матрицы могут оказаться подобными, если в них элементы на местах крестов в клетках (5, 9) совпадают.

Замечание 2. Из леммы и теоремы 3 следует, что в каждом классе сопряженных элементов группы H_n существует точно одна матрица, записанная в нормальной форме.

Замечание 3. Пусть известны все нормальные формы $n-1$-го порядка $A_1, \ldots, A_k$. Для того чтобы построить все нормальные формы n-го порядка, поступаем следующим образом:

а) для каждой формы A_j составляем множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, где $(\alpha_1, n), \ldots, (\alpha_r, n)$ — все непустые углы по отношению к схеме A_j;

б) составляем всевозможные упорядоченные последовательности индексов $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{q_i}}\} = X_i$ из множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, включая и пустую последовательность;

в) произвольным образом упорядочиваем множества этих последовательностей, например $X_1, \ldots, X_l$;

г) если $X_i = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{q_i}}\}$, то берем матрицу типа $A_j(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{q_i}})$ и определяем, подобна ли она матрицам ранее построенных типов — нормальных форм.

В заключение приношу благодарность С. Д. Берману за руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман, Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та, сер. физ-матем. наук, № 3, 1960, 50.
2. С. С. Поляк, Научн. записки Ужгородск. ун-та, т. XLIX, 1962, 26—45.

Поступила 28.X 1963 г.
Ужгород