К задаче о конформном склеивании полуполосы

А. А. Гольдберг

Пусть на $[0, \infty)$ задана функция $\varphi(x)$, непрерывная вместе со своей первой производной и обладающая кусочно-непрерывной второй производной*. Кроме того, предполагаем, что $\varphi'(x) > 0$ при $0 \leqslant x < \infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Рассмотрим в z-плоскости $(z = x + iy)$ полуполосу S, ограниченную полупрямыми $T_0 = \{y = 0, 0 \leqslant x < \infty\}$, $T_1 = \{y = 1, \varphi(0) \leqslant x < \infty\}$ и отрезком Q, соединяющим точки $z = 0$ и $z = \varphi(0) + i$. Известно ([1], гл. IV), что существует функция $w = w(z)$, конформно отображающая полуполосу S на область, которую получим, если в $\{1 < |w| < R \leqslant \infty\}$ проведем разрез по некоторой открытой жордановой дуге $\Sigma: w = \psi(t)$, $t \in (0, 1)$, такой, что при $t \to 0$ функция $\psi(t) \to w_0$, $|w_0| = 1$, а при $t \to 1$ выполняется $|\psi(t)| \to R$. При этом $w(z)$ отображает отрезок Q на $\{|w| = 1\}$, а T_0 и T_1 — на противоположные края разреза Σ так, что $w(x) = w(\varphi(x) + i)$. Функция $\varphi(x)$ называется функцией склеивания полуполосы, а о функции $w = w(z)$ говорят, что она реализует конформное склеивание полуполосы.

В задаче о склеивании полуполосы прежде всего возникает вопрос, будет ли $R < \infty$ (гиперболический тип склеивания) или $R = \infty$ (параболический тип склеивания). Имеется обширная литература по вопросу о типе склеивания полуполосы (к склеиванию полуполосы сводятся также многие другие задачи на склеивание, например задача на склеивание полосы, плоскости с разрезом по лучу и др.); укажем лишь на [1, 2], где приведены дальнейшие ссылки. Однако в приложениях задачи на склеивание полуполосы (см., например, [3], гл. VIII) нам важно знать не только тип склеивания полуполосы, но и с большой точностью асимптотику функции $w = w(z)$, реализующей конформное склеивание. В случае, когда $\varphi(x) = x + a$ и когда $\varphi(x) = cx$, a и c — действительные постоянные, $c > 0$, известны точные выражения для функции $w = w(z)$, реализующей конформное склеивание [3, 4].

В настоящей статье ставится цель дать асимптотическое выражение для $w = w(z)$ в случае, когда $\varphi'(x) \not\equiv \mathrm{const}$, однако в некотором смысле $\varphi'(x)$ является «почти постоянной».

Введем следующие обозначения: $\Delta(x) = \varphi(x) - x$, $\nu(x) = \max(\varphi'(x), 1/\varphi'(x))$, $\mu(x) = (\nu(x) - 1)/\ln \nu(x)$ при $\nu(x) > 1$ и $\mu(x) = 1$ при $\nu(x) = 1$,

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln[1 + y(\varphi'(x) - 1)]}{\ln \varphi'(x)} & \text{при } \varphi'(x) \neq 1 \\ y & \text{при } \varphi'(x) = 1. \end{cases} \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1),$$

* Мы накладываем на $\varphi(x)$ избыточные требования гладкости, чтобы не отвлекать внимание второстепенными деталями.

Легко видеть, что функция $\mu(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x < \infty$, а $\Phi(x, y)$ непрерывна вместе с первыми частными производными при $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Пусть функция $\lambda = \lambda(x, y)$ определяется как неявная функция уравнением $(0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$:

$$\varphi(\lambda) y + \lambda(1 - y) - x = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что $\lambda = \lambda(x, y)$ — однозначная, непрерывная вместе с первыми частными производными функция, причем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{1}{\varphi'(\lambda) y + 1 - y} > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{-\Delta(\lambda)}{\varphi'(\lambda) y + 1 - y} = -\Delta(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial x}. \tag{3}$$

Теперь можем сформулировать основной результат статьи.

Теорема. *Пусть функция склеивания $\varphi(x)$ такова, что сходится интеграл*

$$\int_0^\infty \frac{(\varphi''(x))^2 \min(\varphi'(x), 1)}{(\varphi'(x))^3 (1 + |\ln \varphi'(x)|)}\, dx < \infty. \tag{4}$$

Тогда расходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\mu(x) \min(\varphi'(x), 1)}{1 + \Delta^2(x)}\, dx \tag{5}$$

является необходимым и достаточным условием для параболического типа склеивания.

Если $\varphi(x)$ такова, что, помимо (4), выполняется условие

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi''(x)|}{\varphi'(x)(1 + |\ln \varphi'(x)|) \sqrt{1 + \Delta^2(x)}}\, dx < \infty, \tag{6}$$

то в случае расходимости интеграла (5) для функции $w = w(z)$, реализующей конформное склеивание, выполняется

$$w(x + iy) = A(1 + \varepsilon(x, y)) \exp\left\{2\pi \left[\int_0^{\lambda(x,y)} \frac{\mu(t) \min(\varphi'(t), 1)}{1 + \Delta^2(t)}\, dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i \int_0^{\lambda(x,y)} \frac{\mu(t) \Delta(t) \min(\varphi'(t), 1)}{1 + \Delta^2(t)}\, dt + i\Phi(\lambda(x, y), y) \right]\right\}, \tag{7}$$

где $\varepsilon(x, y)$ равномерно относительно y стремится к нулю при $x \to +\infty$, $A = \mathrm{const} \neq 0, \infty$.

То, что расходимость интеграла (5) достаточна для параболического типа склеивания и без дополнительного условия (4), показано Д. Б. Потягайло [2] (в [2] это записано в равносильной, но менее компактной форме). Отметим, что в [5] нами очень просто доказано следующее утверждение, из которого следует критерий Д. Б. Потягайло. Пусть $S(x_1, x_2)$ — двусвязная область, которая получается из трапеции с вершинами в точках $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(\varphi(x_2), 1)$, $(\varphi(x_1), 1)$ в результате склеивания отрезков $\{x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$

$y=0\}$ и $\{\varphi(x_1) \leqslant x \leqslant \varphi(x_2),\ y=1\}$ с помощью функции $\varphi(x)$, $M(S(x_1, x_2))$ — модуль области $S(x_1, x_2)$. Тогда

$$M(S(x_1, x_2)) \geqslant 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu(x)\min(\varphi'(x), 1)}{1+\Delta^2(x)}\, dx,$$

причем для линейной функции $\varphi(x)$ здесь имеет место равенство. Нам остается доказать, что при дополнительном ограничении (4) расходимость интеграла (5) необходима для параболического типа склеивания, а также получить формулу (7).

Заметим, что если полная вариация функции $\ln(1+\ln\nu(x))$ на $[0, \infty)$ ограничена, то выполняется условие (6). Действительно, учитывая, что $|\varphi''(x)| = |\nu'(x)|\{\min(\varphi'(x), 1)\}^2$, получаем

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi''(x)|\, dx}{\varphi'(x)(1+|\ln\varphi'(x)|)\sqrt{1+\Delta^2(x)}} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{|\nu'(x)|\, dx}{\nu(x)(1+\ln\nu(x))\sqrt{1+\Delta^2(x)}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \frac{|\nu'(x)|\, dx}{\nu(x)(1+\ln\nu(x))} = \int_0^\infty |d\ln(1+\ln\nu(x))| < \infty. \qquad (6')$$

С другой стороны, условие (4) можно переписать в следующей равносильной форме

$$\int_0^\infty \left(\frac{\nu'(x)}{\nu(x)}\right)^2 \frac{dx}{(1+\ln\nu(x))\max(\varphi'(x), 1)} < \infty. \qquad (4')$$

Если дополнительно предположить, что $\nu'(x) = O(1)$, то условие (4′) выполняется, если выполнено (6′). Поэтому в условии теоремы требования (4) и (6) можно заменить следующими более обозримыми:

а) $\nu'(x) = O(1)$,

б) полная вариация $\ln(1+\ln\nu(x))$ на $0 \leqslant x < \infty$ ограничена.

Если $\nu(x) = O(1)$, то требования ограниченности вариации функций $\ln(1+\ln\nu(x))$ и $\nu(x)$ равносильны, поэтому в условии теоремы требования (4) и (6) могут быть заменены еще и такими:

в) $\nu'(x) = O(1)$, $\nu(x) = O(1)$,

г) полная вариация $\nu(x)$ на $0 \leqslant x < \infty$ ограничена.

Переходим к доказательству теоремы. Отобразим квазиконформно полуполосу S на криволинейную полуполосу S' в $\zeta = \xi + i\eta$-плоскости, ограниченную следующими кривыми: кривой L_0,

$$L_0 = \begin{cases} \xi = \displaystyle\int_0^x \frac{\mu(t)\min(\varphi'(t), 1)}{1+\Delta^2(t)}\, dt, \\ \\ \eta = \displaystyle\int_0^x \frac{\mu(t)\Delta(t)\min(\varphi'(t), 1)}{1+\Delta^2(t)}\, dt, \end{cases} \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

кривой L_1, которая получается из L_0 сдвигом на 1 по направлению оси η, и отрезком $\{\xi = 0, 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$. Искомое квазиконформное отображение осуществляется функцией

$$\zeta = \zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y) =$$
$$= \int_0^{\lambda(x, y)} \frac{\mu(t) \min(\varphi'(t), 1)}{1+\Delta^2(t)} dt +$$
$$+ i \int_0^{\lambda(x, y)} \frac{\mu(t)\Delta(t) \min(\varphi'(t), 1)}{1+\Delta^2(t)} dt + i\Phi(\lambda(x, y), y).$$

Легко видеть, что $\lambda(x, 0) = x$ и $\lambda(\varphi(x), 1) = x$, $\Phi(\lambda, 0) = 0$, $\Phi(\lambda, 1) = 1$. Поэтому точки $(x, 0) \in T_0$ и $(\varphi(x), 1) \in T_1$ при отображении $\zeta = \zeta(z)$ переходят соответственно в точки на L_0 и L_1 с одинаковыми абсциссами. Следовательно, функция $\omega = \exp(2\pi\zeta(z))$ реализует квазиконформное склеивание полуполосы S и отображает эту полуполосу с заданным законом отождествления точек на T_0 и T_1 на область $\{1 < |\omega| < R'\}$, где

$$R' = \exp\left\{2\pi \int_0^{\infty} \frac{\mu(t) \min(\varphi'(t), 1)}{1+\Delta^2(t)} dt\right\}. \tag{8}$$

Посредством отображений $\{1 < |\omega| < R'\} \longleftrightarrow S' \longleftrightarrow S \longleftrightarrow \{1 < |w| < R\}$ у нас определяется взаимно однозначное квазиконформное отображение $w = w(\omega) = w(z(\zeta(\omega)))$, причем отображения $\zeta = \zeta(\omega)$ и $w = w(z)$ конформные и лишь $z = z(\zeta)$ — квазиконформное отображение. Характеристику квазиконформного отображения, как обычно, будем обозначать через $p(\omega) = p(\zeta) = p(z)$. Пусть $\omega = \sigma + i\tau$. Оценим интеграл

$$I = \iint\limits_{1<|\omega|<R'} [p(\omega) - 1] \frac{d\sigma d\tau}{|\omega|^2} = \iint\limits_{S'} [p(\zeta) - 1] d\xi d\eta =$$
$$= \int_0^{\infty}\int_0^1 [p(z) - 1] \frac{D(\xi, \eta)}{D(\lambda, y)} d\lambda dy =$$
$$= \int_0^{\infty}\int_0^1 [p(z) - 1] \xi'_\lambda \Phi'_y d\lambda dy.$$

Здесь и в дальнейшем, записывая Φ'_y, имеем в виду явную зависимость $\Phi(\lambda, y)$ от y, зависимость через $\lambda = \lambda(x, y)$ во внимание не принимается. Используем формулу (см., например, [1], стр. 109; [3], стр. 167)

$$p(z) + \frac{1}{p(z)} = \frac{\xi_x'^2 + \xi_y'^2 + \eta_x'^2 + \eta_y'^2}{\xi'_x\eta'_y - \xi'_y\eta'_x} \tag{9}$$

и равенства

$$\xi'_x = \xi'_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \quad \xi'_y = -\Delta\xi'_\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial x},$$
$$\eta'_x = (\Delta\xi'_\lambda + \Phi'_\lambda) \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \tag{10}$$
$$\eta'_y = (\Delta\xi'_\lambda + \Phi'_\lambda)\left(-\Delta\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + \Phi'_y;$$

при выводе (10) использовалось равенство (3). После простых вычислений получим

$$p(z) + \frac{1}{p(z)} - 2 =$$

$$= \frac{(1+\Delta^2)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 [\xi_\lambda'^2 + (\Delta\xi_\lambda' + \Phi_\lambda')^2] - 2(1+\Delta^2)\,\xi_\lambda'\Phi_y'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \Phi_y'^2 - 2\Delta\Phi_\lambda'\Phi_y'\frac{\partial\lambda}{\partial x}}{\xi_\lambda'\Phi_y'\frac{\partial\lambda}{\partial x}}.$$

Учитывая, что

$$\xi_\lambda' = \frac{\mu(\lambda)\min(\varphi'(\lambda), 1)}{1+\Delta^2(\lambda)},$$

$$\Phi_y' = \frac{\varphi'(\lambda) - 1}{\ln\varphi'(\lambda)}\,\frac{1}{y(\varphi'(\lambda)-1)+1} = \mu(\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial x}\min(\varphi'(\lambda), 1),$$

получаем

$$p(z) + \frac{1}{p(z)} - 2 = \frac{1+\Delta^2(\lambda)}{\mu^2(\lambda)\{\min(\varphi'(\lambda), 1)\}^2}\Phi_\lambda'^2. \tag{11}$$

Здесь

$$\Phi_\lambda' = \Phi_{\varphi'}'\varphi''(\lambda),$$

$$\Phi_{\varphi'}' = \begin{cases} \dfrac{y\varphi'\ln\varphi' - [1+y(\varphi'-1)]\ln[1+y(\varphi'-1)]}{[1+y(\varphi'-1)]\varphi'\ln^2\varphi'} & \text{при } \varphi' \neq 1, \\[2ex] \dfrac{y(1-y)}{2} & \text{при } \varphi' = 1. \end{cases}$$

Из элементарного неравенства $(0 \leqslant y < 1,\ x > -1)$

$$y(1+x)\ln(1+x) - (1+yx)\ln(1+yx) \geqslant 0$$

следует, что всегда $\Phi_{\varphi'}' \geqslant 0$. Обозначим через $K(\lambda, y)$ функцию $(0 \leqslant y \leqslant 1,$ $0 \leqslant \lambda < \infty)$

$$K(\lambda, y) = \frac{\sqrt{1+\Delta^2(\lambda)}}{\mu(\lambda)\min(\varphi'(\lambda), 1)}\Phi_{\varphi'}'(\lambda, y)\,|\varphi''(\lambda)| \geqslant 0.$$

Учитывая, что $p(z) \geqslant 1$, из (11) получаем неравенство

$$p(z) - 1 = \frac{K^2}{2} + K\sqrt{1 + \frac{K^2}{4}} \leqslant K + K^2.$$

Отсюда

$$I \leqslant \int_0^\infty\int_0^1 K(\lambda, y)\,\xi_\lambda'\Phi_y' d\lambda dy +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^1 K^2(\lambda, y)\,\xi_\lambda'\Phi_y' d\lambda dy = I_1 + I_2. \tag{12}$$

Так как

$$\xi_\lambda'\Phi_y' = \frac{\mu^2(\lambda)\{\min(\varphi'(\lambda), 1)\}^2}{1+\Delta^2(\lambda)}\,\frac{1}{y(\varphi'(\lambda)-1)+1},$$

то

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\mu(\lambda)\{\min(\varphi'(\lambda),\ 1)\}\,|\varphi''(\lambda)|}{\sqrt{1+\Delta^2(\lambda)}}\, d\lambda \int_0^1 \Phi'_{\varphi'}(\lambda, y)\, \frac{dy}{y(\varphi'(\lambda)-1)+1}, \quad (13)$$

$$I_2 = \int_0^\infty (\varphi''(\lambda))^2\, d\lambda \int_0^1 \{\Phi'_{\varphi'}(\lambda, y)\}^2\, \frac{dy}{y(\varphi'(\lambda)-1)+1}. \quad (14)$$

Простой, хотя и несколько громоздкий, подсчет дает

$$E_1(\lambda) = \int_0^1 \Phi'_{\varphi'}(\lambda, y)\, \frac{dy}{y(\varphi'(\lambda)-1)+1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\varphi'(\lambda)+1)\ln\varphi'(\lambda)+2(1-\varphi'(\lambda))}{2\varphi'(\lambda)(\varphi'(\lambda)-1)^2\ln\varphi'(\lambda)} & \text{при } \varphi'(\lambda)\neq 1, \\ \dfrac{1}{12} & \text{при } \varphi'(\lambda)=1; \end{cases}$$

$$E_2(\lambda) = \int_0^1 \{\Phi'_{\varphi'}(\lambda, y)\}^2\, \frac{dy}{y(\varphi'(\lambda)-1)+1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{6\varphi'\ln^2\varphi' - 9(\varphi'^2-1)\ln\varphi' + 2(\varphi'-1)^2(6+\ln^2\varphi')}{6\varphi'^2(\varphi'-1)^3\ln^3\varphi'} & \text{при } \varphi'\neq 1, \\ \dfrac{1}{120} & \text{при } \varphi'=1. \end{cases}$$

Будем обозначать через C_i абсолютные положительные постоянные, вообще разные. Легко видеть, что справедливо

$$E_1(\lambda) \leqslant \frac{C_1}{\varphi'(\lambda)\max(\varphi'(\lambda),\ 1)},$$

$$E_2(\lambda) \leqslant \frac{C_2\min(\varphi'(\lambda),\ 1)}{(\varphi'(\lambda))^3(1+|\ln\varphi'(\lambda)|)}.$$

Далее

$$\frac{\mu(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}\,\frac{\min(\varphi'(\lambda),\ 1)}{\max(\varphi'(\lambda),\ 1)} \leqslant \frac{C_3}{\varphi'(\lambda)(1+|\ln\varphi'(\lambda)|)}.$$

Из оценок (12) — (14) получаем, что если выполнены условия (4) и (6), то

$$I = \iint\limits_{1<|\omega|<R'} [p(\omega)-1]\,\frac{d\sigma d\tau}{|\omega|^2} < \infty. \quad (15)$$

Согласно теореме Хельстрема — Белинского [6, 7] об изменении модуля двусвязной области при квазиконформном отображении имеет место неравенство

$$\left|\ln\frac{R}{R'}\right| \leqslant I. \quad (16)$$

Пусть интеграл (5) сходится и выполнено (4). В силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left(\int_0^\infty \frac{|\varphi''(x)|}{\varphi'(x)} \frac{dx}{(1+|\ln\varphi'(x)|)\sqrt{1+\Delta^2(x)}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \frac{(\varphi''(x))^2 \min(\varphi'(x),1)}{(\varphi'(x))^3(1+|\ln\varphi'(x)|)}\,dx \int_0^\infty \frac{\varphi'(x)\,dx}{\min(\varphi'(x),1)\,(1+|\ln\varphi'(x)|)\,(1+\Delta^2(x))}.$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{\varphi' dx}{\min(\varphi',1)\,(1+|\ln\varphi'|)\,(1+\Delta^2)} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\nu(x)}{1+\ln\nu(x)} \frac{\min(\varphi'(x),1)}{1+\Delta^2(x)}\,dx < C_1 \int_0^\infty \frac{\mu(x)\min(\varphi'(x),1)}{1+\Delta^2(x)}\,dx,$$

то из (4) и сходимости интеграла (5) следует, что выполняется (6). Поэтому справедливо (15). В силу равенства (8) $1 < R' < \infty$, и из (15) и (16) заключаем, что $1 < R < \infty$, т. е. тип склеивания гиперболический. Таким образом, доказана необходимость расходимости интеграла (5) для параболического типа склеивания при выполнении условия (4).

Предположим теперь, что интеграл (5) расходится и выполняются условия (4) и (6). Тогда $R = R' = \infty$ и в силу (15) к квазиконформному отображению $w = w(\omega)$ области $\{1 < |\omega| < \infty\}$ на $\{1 < |w| < \infty\}$ применима теорема Тейхмюллера — Белинского ([3], гл. VI, п. 12; [6]), в силу которой

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{w(\omega)}{\omega} = A, \tag{17}$$

где $A \neq 0, \infty$ и предел равномерный относительно $\arg\omega$. Подставляя в (17) вместо ω функцию $\omega(\zeta(z))$ и учитывая, что условия $|\omega| \to \infty$ и $x \to \infty$ равносильны, получаем формулу (7).

Теорема полностью доказана.

Заметим еще, что если $\varphi'(x) \equiv \text{const}$, то правая часть (11) тождественно равна нулю, следовательно, $p(z) \equiv 1$. Отображение $\zeta(z)$ является конформным, следовательно, отображение $w = w(\omega)$ конформное и $w = e^{i\theta}\omega$. В этом случае в (7) $|A| = 1$ и $\varepsilon(x, y) \equiv 0$, т. е. мы получаем точную формулу для функции $w = w(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Волковыский, Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **34**, 1950, 1—171.
2. Д. Б. Потягайло, О типе склеивания полосы, ДАН СССР, **138**, 1961, 1025—1028.
3. Г. Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М., 1960.
4. R. Nevanlinna, Über Polygonaldarstellung einer Riemannschen Fläche, Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. I A, № 122, 1952, 1—9.
5. А. А. Гольдберг, О нижнем порядке целой функции с конечным дефектным значением, Сибирск. матем. ж., **5**, 1964, 54—76.
6. G. af Hällström, Eine quasikonforme Abbildung mit Anwendungen auf die Wertverteilungslehre, Acta Acad. Aboensis, Math. et phys., 18, № 8, 1952, 1—16.
7. П. П. Белинский, Поведение квазиконформного отображения в изолированной точке, ДАН СССР, **91**, 1953, 709—710.

Поступила 10.XI 1962 г.

Львов