1964 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. XVI, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О сингулярностях амплитуды рассеяния в комплексной z-плоскости

Н. Т. Мордовец

В работах [1, 2] показано, что некоторые интересные результаты, относящиеся к исследованию аналитических свойств амплитуды рассеяния в квантовой теории поля, могут быть легко получены, если исходить из следующих уже установленных фактов.

Во-первых, амплитуда как функция угла рассеяния аналитическая по $z = \cos\Theta$ в так называемом «малом» эллипсе Лемана, что дает возможность разлагать ее в ряд по полиномам Лежандра.

Во-вторых, между особенностями β функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P(z)$ и особенностями α функции $F(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \zeta^n$ существует установленная Фабером зависимость

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{1}$$

что позволяет извлекать аналитические свойства функции, представленной разложением по полиномам Лежандра, из известных свойств степенного ряда, имеющего те же коэффициенты, что и ряд по полиномам Лежандра, — a_n. В частности, было показано [2], что результат Редже [3] об аналитичности функции $f(z)$ (амплитуды рассеяния) во всей плоскости $z = \cos\Theta$, за исключением разреза от начала эллипса Лемана x_0 вдоль действительной оси до ∞, сразу следует, в силу соотношения (1), из теоремы Ле Руа-Линделефа [2] о голоморфности представленной степенным рядом функции $F(\zeta)$ для всех $\zeta = r \cdot e^{i\theta}$, лежащих внутри угла $\vartheta < \theta < 2\pi - \vartheta$, где $0 < \vartheta < \pi$, если положить $\vartheta = 0$.

§ **1**. В связи с этим представляется интересным рассмотреть вопрос об аналитичности амплитуды рассеяния как функции z за эллипсом Лемана, исходя из других известных в теории рядов Тейлора фактов, которые устанавливают, как и выше упомянутая теорема Ле Руа-Линделефа, возможность аналитического продолжения функции $F(\zeta)$ за круг сходимости степенного ряда. Кажется естественным воспользоваться прежде всего двумя теоремами В. Коулинга, которые представляют собою обобщение теоремы Ле Руа-Линделефа [4]. Заметим, что, в силу причин, которые будут выяснены ниже, нам здесь понадобится следующее почти очевидное видоизменение теоремы Коулинга для случая $r_0 > 1$.

Теорема 1. (Коулинг). *Пусть $F(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \zeta^n$ имеет радиус сходимости $r_0 > 1$. Пусть коэффициенты выбраны с помощью аналитической* *функции* $a(\zeta)$ в $\zeta = 0, 1, 2, \ldots$ *Предположим, что* $a(\zeta)$ *является регулярной (за исключением, возможно, полюса порядка* k *на бесконечности) в угле с вершиной* h *(нецелое) на вещественной оси, включающем эту ось в свою внутренность. Пусть стороны этого угла образуют с вещественной осью углы* ψ_1 *и* ψ_2. *Тогда, если* $a(\zeta)$ *для* $\zeta = h + R\exp[i\psi]$ *удовлетворяет неравенству*

$$|a(h + R\exp[i\psi]| < \text{const}\cdot R^k, \;\; R > R_0, \;\; \psi_1 < \psi < \psi_2, \tag{2}$$

то для произвольно малого $\gamma > 0$ $F(\zeta)$ *регулярна в области, общей для*

$$A\colon\; r \leqslant r_0\cdot\exp[\theta \operatorname{tg}\psi_1] - \gamma, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

$$r \leqslant r_0\cdot\exp[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2] - \gamma, \;\; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{3. A}$$

где $0 < \psi_1 < \dfrac{\pi}{2}, \; -\dfrac{\pi}{2} < \psi_2 < 0$;

$$\text{B}\colon\; r \geqslant r_0\cdot\exp[\theta \operatorname{tg}\psi_1] + \gamma, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

$$r \geqslant r_0\cdot\exp[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2] + \gamma, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{3. B}$$

где $\dfrac{\pi}{2} < \psi_1 < \pi, \; -\pi < \psi_2 < -\dfrac{\pi}{2}$.

Другими словами, теорема I, часть A, утверждает, что при выше указанных свойствах интерполяционной функции $a(\zeta)$ функция $F(\zeta)$ может быть аналитически продолжена за круг сходимости степенного ряда с $r_0 > 1$ (за который она аналитически не продолжаема лишь для предельных значений $\psi_1 = \psi_2 = 0$) и что все точки ($3A$) являются сингулярными точками для $F(\zeta)$, т. е. упомянутые спирали являются особыми линиями для функции $F(\zeta)$.

Утверждение части B теоремы I означает, что точка $\operatorname{Re}\zeta = r_0$ является единственной сингулярной точкой функции $F(\zeta)$ в конечной ζ-плоскости.

Отсюда, в силу соотношения (1), следует, что сингулярности функции $f(z)$ (амплитуды рассеяния), представленной разложением по полиномам Лежандра, в котором a_n выступают теперь в роли парциальных амплитуд, должны лежать на спиралях вида

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[\theta\operatorname{tg}\psi_1 + \ln r_0] + i\sin\theta\cdot\operatorname{sh}[\theta\operatorname{tg}\psi_1 + \ln r_0], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \tag{4}$$

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 + \ln r_0] + i\sin\theta\,[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 + \ln r_0], \;\; \theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

где θ_0 задается соотношением

$$\theta_0 = \frac{2\pi\,|\operatorname{tg}\psi_2|}{\operatorname{tg}\psi_1 + |\operatorname{tg}\psi_2|}.$$

В зависимости от значений ψ_1 и ψ_2 возможны следующие частные случаи.

1. Пусть $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Другими словами, интерполяционная функция $a(\zeta)$ регулярна лишь на отрезке вещественной оси (h, ∞). Тогда спирали (4) превращаются в эллипс

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[\ln r_0] + i\sin\theta\cdot\operatorname{sh}[\ln r_0] \tag{5}$$

с полуосями $a = \operatorname{ch}[\ln r_0]$ и $b = \operatorname{sh}[\ln r_0]$. Все точки этого эллипса являются сингулярными точками функции $f(z)$, которая регулярна внутри эллипса и не может быть аналитически продолженной за его пределы. Иначе говоря, эллипс является особой линией для $f(z)$. Между прочим, теперь становится ясно, почему нам понадобилось предположить, что радиус круга сходимости $r_0 > 1$. Когда $r_0 = 1$, то $a = 1$, $b = 0$ и эллипс вырождается в отрезок вещественной оси $[-1, +1]$.

2. Пусть $0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \psi_2 < 0$, т. е. функция $a(\zeta)$ регулярна в некоторой угловой области D. Тогда функция $f(z)$ регулярна в области G_2, границами которой являются спирали (4), все точки которых сингулярны для $f(z)$. Таким образом, спирали (4) — особые линии для функции $f(z)$.

3. Пусть $0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}$, $\psi_2 = 0$. Тогда область регулярности $f(z)$ G_3 ограничена спиралью

$$z = \cos\theta \cdot \mathrm{ch}[\theta \operatorname{tg} \psi_1 + \ln r_0] + i \sin\theta \cdot \mathrm{sh}[\theta \operatorname{tg}\psi_1 + \ln r_0], \tag{6}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, и отрезком вещественной оси $[\mathrm{ch}[\ln r_0], \mathrm{ch}[2\pi \operatorname{tg}\psi_1 + \ln r_0]$. Опять-таки спираль (6) является особой линией для $f(z)$. Отрезок же является более деликатной частью границы области G_3, и вопрос о возможности аналитического продолжения через него является открытым.

Очевидно, нет нужды рассматривать симметричный случай $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \psi_2 < 0$ отдельно, так как при этом углы просто меняются ролями.

4. Пусть $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_2 = -\frac{\pi}{2}$, иными словами, $a(\zeta)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta = h$. В этом случае $f(z)$ регулярна во всей плоскости z, за исключением отрезка вещественной оси $[x_0, \infty)$, $x_0 = \mathrm{ch}[\ln r_0]$. Результат этот получен ранее в [3] (см. также [2]), о чем было сказано вначале.

5. Пусть $\psi_1 > \frac{\pi}{2}$, $\psi_2 < -\frac{\pi}{2}$, т. е. область регулярности функции $a(\zeta)$ больше полуплоскости, представляя собою сектор с раствором $\psi > 180°$. Тогда единственной сингулярной точке функции $F(\zeta)$ $\operatorname{Re}\zeta = r_0$ соответствует на плоскости z единственная сингулярная точка функции $f(z)$ $x_0 = \mathrm{ch}[\ln r_0]$. Таким образом, $f(z)$ регулярна в этом случае во всей конечной области z, за исключением точки x_0.

§ 2. Несколько сложнее обстоит дело, когда $a(\zeta)$ регулярна в той же угловой области D, включая стороны угла, но на бесконечности может иметь существенную особенность. Тогда справедлива следующая (также видоизмененная для $r_0 > 1$) теорема.

Теорема II. (Коулинг). *Пусть $F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \zeta^n$ имеет радиус сходимости $r_0 > 1$. Пусть выполняются условия теоремы* I, *но с такими изменениями:* 1) $a(\zeta)$ *может иметь на бесконечности существенную особенность;* 2) *внутри угла с вершиной* h *(нецелое)* $a(\zeta)$ *ограничена экспонентой*

$$|a(h + R\cdot \exp[i\psi])| < \exp[\delta R], \qquad \psi_2 \leqslant \psi \leqslant \psi_1, \tag{7}$$

где $R > R_0$, $\delta \leqslant \pi - d$, $d > 0$. Тогда, если

A: $0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \psi_2 < 0$, то функция $F(\zeta)$ регулярна в области, общей для

$$r \leqslant r_0 \cdot \exp[\theta \operatorname{tg}\psi_1 - \delta \sec\psi_1] - \gamma, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{8.A}$$

и

$$r \leqslant r_0 \cdot \exp[(\theta - 2\pi) \operatorname{tg}\psi_2 - \delta\cdot\sec\psi_2] - \gamma, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

B: если $\frac{\pi}{2} < \psi_1 < \pi$, $-\pi < \psi_2 < -\frac{\pi}{2}$, то функция регулярна в конечной области, общей для

$$r \geqslant r_0 \cdot \exp[\theta \operatorname{tg}\psi_1 - \delta\cdot \sec\psi_1] + \gamma, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{8. B}$$

и

$$r \geqslant r_0 \cdot \exp[(\theta - 2\pi) \operatorname{tg}\psi_2 - \delta \sec\psi_2] + \gamma, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Поступая, как и выше, можно показать, что сингулярности функции $f(z)$ в этом случае должны лежать на спиралях вида

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[\theta\operatorname{tg}\psi_1 - \delta\sec\psi_1 + \ln r_0] + i\sin\theta\cdot\operatorname{sh}[\theta\operatorname{tg}\psi_1 - \delta\sec\psi_1 + \ln r_0],$$
$$0 < \theta < \theta_0 \tag{9}$$

и

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 - \delta\sec\psi_2 + \ln r_0] + i\sin\theta\cdot\operatorname{sh}[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 -$$
$$- \delta\sec\psi_2 + \ln r_0], \qquad \theta_0 < \theta < 2\pi,$$

где θ_0 определяется соотношением

$$\theta_0 = \frac{2\pi\cdot|\operatorname{tg}\psi_2| + \delta(\sec\psi_1 - \sec\psi_2)}{\operatorname{tg}\psi_1 + |\operatorname{tg}\psi_2|}.$$

При этом возможны следующие частные случаи, аналогичные рассмотренным выше.

1. Пусть $\psi_1 = \psi_2 = 0$, т. е. $a(\zeta)$ регулярна на отрезке $[h, \infty)$. Спирали (9) при этом превращаются в эллипс

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[\ln r_0 - \delta] + i\sin\theta\cdot\operatorname{sh}[\ln r_0 - \delta],$$

лежащий внутри эллипса (5). Поскольку в этом случае сингулярности $F(\zeta)$ расположены на окружности радиуса r_0, то функция $f(z)$ аналитична внутри эллипса (5) с полуосями a и b. Этот эллипс является особой линией для функции $f(z)$.

2. Пусть $0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \psi_2 < 0$. Функция $f(z)$ будет регулярна в области G_5, ограниченной следующими кривыми: а) спиралями (9), причем параметр θ изменяется, соответственно, в пределах $\theta_1 \leqslant \theta < \theta_0$ и $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, где θ_1 и θ_2 — это значения параметров, при которых спирали (9) пересекаются с эллипсом (5); они задаются равенствами $\theta_1 = \delta\cdot\csc\psi_1$, $\theta_2 = \delta\cdot\csc\psi_2$; б) дугой эллипса (5) $(z_1x_0z_2)$, где z_1 и z_2 — точки пересечения спиралей и эллипса.

3. Пусть $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \psi_2 < 0$. Тогда сингулярности функции $f(z)$ будут лежать: а) на спирали

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 - \delta\sec\psi_2 + \ln r_0] + i\sin\theta\operatorname{sh}[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 -$$
$$- \delta\sec\psi_2 + \ln r_0],$$

где параметр θ меняется в пределах $\delta \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; б) на участке гиперболы

$$z = \cos\delta\cdot\operatorname{ch}[\ln r] + i\sin\delta\cdot\operatorname{sh}[\ln r], \quad 1 \leqslant r < \infty,$$

с полуосями $\cos\delta$ и $\sin\delta$, лежащем за эллипсом (5); в) на дуге самого эллипса. Все названные выше линии являются особыми для $f(z)$.

4. Пусть $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\psi_2 = -\frac{\pi}{2}$. Сингулярные точки функции $f(z)$ в этом случае будут лежать на участках гиперболы

$$z = \cos\delta\cdot\operatorname{ch}[\ln r] + i\sin\delta\cdot\operatorname{sh}[\ln r], \quad 1 \leqslant r \leqslant \infty,$$

находящихся за эллипсом, и на дуге эллипса. Функция $f(z)$ регулярна в области G_7, расположенной слева от этих линий, являющихся также особыми для нее. Эта область, как видим, зависит от выбора δ. Когда $\delta \to 0$, малая полуось гиперболы стремится к 0, гипербола вырождается в отрезок $[1, \infty)$, на эллипсе остается единственная сингулярная точка x_0, а G представляет собой всю плоскость z с разрезом $[x_0, \infty)$ (ср. пункт 4, § 1). Когда $\delta \to \pi - d$ (где d — произвольно малое, большее 0), гипербола сжимается к отрезку $(-\infty, -1]$, почти весь эллипс, кроме по крайней мере одной точки x_0, становится особой линией для функции $f(z)$, а G представляет собою внутренность эллипса и отрезок вещественной оси $(-\infty, -x_0]$.

5. Пусть, наконец, $\psi_1 > \frac{\pi}{2}$, $\psi_2 < -\frac{\pi}{2}$. Тогда сингулярности $f(z)$ лежат на спиралях

$$z = \cos\theta\cdot \operatorname{ch}[-\theta\,|\operatorname{tg}\psi_1| + \delta\,|\sec\psi_1| + \ln r_0] + i\sin\theta\cdot\operatorname{sh}[-\theta\,|\operatorname{tg}\psi_1| + \delta\,|\sec\psi_1| + \ln r_0], \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

$$z = \cos\theta\cdot\operatorname{ch}[(\theta - 2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 + \delta\,|\sec\psi_2| + \ln r_0] + i\sin\theta\cdot\operatorname{sh}[(\theta-2\pi)\operatorname{tg}\psi_2 + \delta\,|\sec\psi_2| + \ln r_0], \qquad \theta_0 < \theta < 2\pi,$$

и дуге эллипса $(z_1x_0z_2)$, заключенной между этими спиралями. Функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости z, за исключением замкнутой области, ограниченной криволинейным «треугольником», образованным названными выше линиями, которые являются особыми для $f(z)$.

Интересно проследить поведение особых линий в зависимости от выбора ψ_1, ψ_2 и δ, иными словами, от вида области регулярности D функции $a(\zeta)$ и ее асимптотики (7). Спирали выходят из точки $x_1 = \operatorname{ch}[\delta|\sec\psi_1| + \ln r_0]$, пересекая эллипс в точках z_1 и z_2, которым соответствуют значения параметра $\theta: \theta_1 = \delta|\csc\psi_1|$, $\theta_2 = \delta|\csc\psi_2|$. Отсюда легко усмотреть, что при $\delta \to 0$ $x_1 \to x_0$, треугольная область сжимается до единственной сингулярной точки x_0 (ср. пункт 5, § 1). Если же выполняются одновременно неравенства

$$\pi > \delta > \pi\,|\sin\psi_1|,$$
$$\pi > \delta > \pi\,|\sin\psi_2|,$$

то эллипс представляет собою особую линию.

§ 3. Приведенные примеры иллюстрируют зависимость аналитических свойств $f(z)$ (амплитуды рассеяния) от свойств интерполяционной функции $a(\zeta)$ (парциальных амплитуд для ζ — целых). Так, из факта регулярности $a(\zeta)$ в некоторой области D и определенного асимптотического поведения ее в ней следует факт регулярности $f(z)$ в некоторой области G. Имеет смысл говорить и об обратной задаче, а именно: пусть известно, что функция $f(z)$, представимая разложением по полиномам Лежандра, регулярна в некоторой области G, более широкой, чем эллипс; существует ли тогда интерполяционная функция $a(\zeta)$, такая, что $a(n) = a_n$, и если существует, то каковы область ее регулярности и ассимптотика в этой области.

Частичный ответ на этот вопрос можно получить непосредственно из рассмотренных примеров. Действительно, сопоставляя области D и G, можно заметить следующее.

Во-первых, аналитическое продолжение за эллипс сходимости разложения $f(z)$ возможно тогда, когда $a(\zeta)$ регулярна в некоторой угловой области D, в противном случае эллипс является особой линией для $f(z)$.

Во-вторых, когда $a(\zeta)$ имеет при этом на бесконечности полюсную особенность порядка k (конечное число), то на эллипсе находится единственная сингулярная точка x_0. Когда же $a(\zeta)$ на бесконечности имеет существенную особенность, то на эллипсе лежит уже бесконечно много сингулярных точек — целые участки, все точки которых сингулярные для $f(z)$.

Следовательно, перефразировав соответствующее утверждение из [4], можно утверждать, что, если $f(z)$ имеет на эллипсе сходимости ряда по полиномам Лежандра, которым она представлена, другие точки сингулярностей, кроме x_0, то $a(\zeta)$ не может быть аналитической функцией внутри некоторого угла, имеющей на бесконечности самое большее полюс конечного порядка. Достаточно полный ответ на вопрос, поставленный в начале этого параграфа, дает следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P_n(z)$ *может быть аналитически продолжена за пределы эллипса сходимости данного разложения по полиномам Лежандра в некоторую область* $G(\psi_1, \psi_2)$, *ограниченную спиралями*

$$z = \cos\theta \cdot \operatorname{ch}[\theta \operatorname{tg}\psi_1 + \ln r_0] + i \sin\theta \cdot \operatorname{sh}[\theta \operatorname{tg}\psi_1 + \ln r_0],$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$$

и

$$z = \cos\theta \cdot \operatorname{ch}[(\theta - 2\pi) \operatorname{tg}\psi_2 + \ln r_0] + i \sin\theta \cdot \operatorname{sh}[(\theta - 2\pi) \operatorname{tg}\psi_2 + \ln r_0],$$
$$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

где

$$0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_2 < 0, \quad \theta_0 = \frac{2\pi \, |\operatorname{tg}\psi_2|}{\operatorname{tg}\psi_1 + |\operatorname{tg}\psi_2|}.$$

Тогда существует интерполяционная функция $a(\zeta)$, *аналитическая в угловой области* $D(\psi_1', \psi_2')$ — $\psi_2' \leqslant \arg\zeta \leqslant \psi_1'$, *где* $0 < \psi_1' < \psi_1$, $0 > \psi_2' > \psi_2$, *такая, что* $a(n) = a_n$, *и*

$$\limsup_{R \to \infty} \left(\frac{\ln |a(\zeta)|}{R} \right) \leqslant 0$$

равномерно в $-\psi_2 < \arg\zeta < \psi_1'$.

Доказательство теоремы основано на следующих двух леммах.

Лемма 1 [5]. *Сингулярные и внешние точки функции* $F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \zeta^n$ *есть точки* $\{\beta + (\beta^2 - 1)^{1/2}\}$, *где* $\{\beta\}$ — *множество сингулярных и внешних точек функции* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P_n(z)$.

Лемма 2 [6]. *Пусть* $F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \zeta^n$ *является рядом Тейлора с радиусом сходимости* $r_0 > 1$. *Предположим, что* $F(\zeta)$ *может быть аналитически продолжена в область* $D(\psi_1, \psi_2)$, *чьи границы состоят из двух спиралей*

$$\zeta = r_0 \cdot \exp[\theta \cdot \operatorname{tg}\psi_1] \cdot \exp[i\theta], \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0, \tag{3}$$

и

$$\zeta = r_0 \cdot \exp[(\theta - 2\pi) \operatorname{tg}\psi_2] \cdot \exp[i\theta], \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

где

$$0 < \psi_1 < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_2 < 0,$$

$$\theta_0 = \frac{2\pi \, |\operatorname{tg}\psi_2|}{\operatorname{tg}\psi_1 + |\operatorname{tg}\psi_2|}.$$

Тогда для заданных $0 < \psi_1' < \psi_1$ *и* $0 < |\psi_2'| < |\psi_2|$ *существует интерполяционная функция* $a(\zeta)$, *аналитическая в угле* $-\psi_2' \leqslant \arg\zeta \leqslant \psi_1'$, *такая, что* $a(n) = a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *и*

$$\limsup_{R \to \infty} \left(\frac{\ln |a(\zeta)|}{R} \right) \leqslant 0 \tag{10}$$

равномерно в $-\psi_2' \leqslant \arg\zeta \leqslant \psi_1$.

Итак, пусть сингулярности $f(z)$ заданы спиралями [4]. С помощью элементарных преобразований перепишем их в виде

$$z = \frac{1}{2}\left(r_0 \cdot \exp[\theta \operatorname{tg} \psi_1] \cdot \exp[i\theta] + r_0^{-1} \cdot \exp[-\theta \operatorname{tg} \psi_1] \cdot \exp[-i\theta]\right),$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

и

$$z = \frac{1}{2}\left(r_0 \cdot \exp[(\theta - 2\pi) \operatorname{tg} \psi_2] \cdot \exp[i\theta] + r_0^{-1} \exp[(2\pi - \theta) \operatorname{tg} \psi_2] \exp[-i\theta]\right),$$
$$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Тогда, в силу леммы 1, сингулярности $F(\zeta)$ будут лежать на спиралях

$$\zeta = r_0 \cdot \exp[\theta \operatorname{tg} \psi_1] \cdot \exp[i\theta], \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,$$

и

$$\zeta = r_0 \cdot \exp[(\theta - 2\pi) \operatorname{tg} \psi_2] \cdot \exp[i\theta], \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{3}$$

Следовательно, согласно лемме 2, существует функция $a(\zeta)$, аналитическая в угловой области $D(\psi_1', \psi_2')$, несколько меньшей, чем та, которая фигурировала при доказательстве прямого утверждения (ср. пункт 2, § 1), при этом $a(n) = a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а в угле $-\psi_2' \leqslant \arg\zeta \leqslant \psi_1'$ имеет место соотношение (10).

Теорема доказана.

Интересно сопоставить полученные здесь результаты с теми, которые были недавно получены Дж. Челлифором и Р. Иденом [7]. Последние находили, в частности, область регулярности $A(z, s)$ — полной амплитуды рассеяния — по переменной $z = \cos\Theta$, исходя из так называемого видоизмененного представления Редже

$$A(z, s) = \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1)\, a_n(s)\, P_n(z) + \frac{1}{2i} \int\limits_C \frac{d\zeta\,(2\zeta + 1)\, a(\zeta, s) \cdot P_\zeta(-z)}{\sin \pi\zeta}, \tag{11}$$

где C — контур интегрирования, охватывающий полюса функции $[\sin \pi\zeta]^{-1}$ в точках $\zeta = N, N+1, N+2, \ldots$ и т. д.

При этом они исходили из предположения, что $a(\zeta, s)$ голоморфна по ζ в некоторой угловой области, имеет в ней экспоненциальный рост (но на вещественной оси имеет рост, который допускается вотсановским контуром). Оказывается, что области регулярности $f(z)$ по z в рассмотренных нами случаях (см., например, § 1, п. 3; § 2, п. 4) в пределе при $r_0 \to 1$ совпадают с областями регулярности $A(z, s)$ также в плоскости z, найденными в [7] при сходных предположениях о свойствах $a(\zeta, s)$ в плоскости ζ. Исключение представляет разрез по вещественной оси от -1 до $+1$, который появляется в результате представления $A(z, s)$ с помощью (11), в то время как здесь предполагается, что $f(z)$ представима в виде бесконечного ряда по полиномам Лежандра.

В заключение автор выражает благодарность профессору В. К. Дзядыку за ценные замечания, относящиеся к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. С. Парасюк, ДАН СССР, т. 145, 1962, 1247.
2. О. С. Парасюк, ДАН СССР, т. 147, 1962, 572.
3. A. Bottino, A. M. Longoni, T. Regge, Nuovo Cim., **23**, 1962, 954.
4. V. E. Cowling, Bull. Amer. Math. Soc., **52**, 1946, 1065.
5. J. Gunson and J. G. Taylor, Phys. Rev., **121**, 1961, 343.
6. S. Agmon, Pac. J. Math., **2**, 1952, 431.
7. J. L. Challifour, R. J. Eden, Nuovo Cim., **27**, 1963, 1104.

Поступила 28.VI 1963 г.
Киев