Тензор Дарбу и поверхности второго порядка в пространстве Лобачевского

Б. С. Вакарчук

В пространстве Лобачевского рассматриваем поверхности, обладающие тем свойством, что

$$\Theta_{hji} = \nabla_i b_{hj} - \frac{3}{4}\frac{b_{(hj}K_{i)}}{K} = 0. \tag{1}$$

Здесь символом ∇ обозначено ковариантное дифференцирование, K — полная относительная кривизна, b_{ij} — коэффициенты II квадратической формы. Поверхности, для которых тензор Θ_{hij} равен нулю, будем называть поверхностями Дарбу. В евклидовом пространстве класс этих поверхностей полностью исчерпывается поверхностями второго порядка [1]. Таким образом, соотношение (1) является дифференциально-геометрической характеристикой поверхностей второго порядка евклидова пространства.

Выясним характер соотношения (1) для поверхностей второго порядка в пространстве Лобачевского.

Обозначим через k_1 и k_2 главные кривизны поверхности.

Теорема Боне для поверхностей Дарбу в евклидовом пространстве [1] справедлива для поверхностей этого же типа в пространстве Лобачевского. Если поверхность отнесена к линиям кривизны, то по теореме Боне имеем

$$k_1 = \lambda_1(v)\, k_2^3, \quad k_2 = \lambda_2(u)\, k_1^3. \tag{2}$$

Предполагаем, что она из функций $\lambda_1(v)$ или $\lambda_2(u)$ постоянная. Пусть, например, $\lambda_1(v) = c = \text{const}$. При этом полная относительная кривизна поверхности сохраняет постоянное значение вдоль каждой линии $u = \text{const}$. Этим свойством обладают поверхности вращения. В пространстве Лобачевского различаем обыкновенные поверхности вращения и так называемые обобщенные поверхности вращения. Такое обобщение имеет место тогда, когда вместо осевого пучка плоскостей, ортогональные траектории которых образуют на поверхности вращения семейство параллелей, выбрать в качестве исходного сходящийся или расходящийся пучок плоскостей. В качестве параллелей здесь появляются соответственно эквидистанты и предельные линии. Все три типа поверхностей обладают сходными метрическими свойствами [4].

Мы ищем поверхности вращения, для которых

$$k_1 = c k_2^3, \quad c = \text{const}. \tag{3}$$

1). Отнесем пространство Лобачевского к прямоугольной системе координат (0; x, y, z). Пусть $y = f(z)$ — уравнение профиля в этих координатах. При вращении этой кривой вокруг оси oz получаем поверхность вращения, параметрические уравнения которой имеют вид

$$x^1 = \operatorname{sh}\frac{f}{r}\cos\varphi, \quad x^2 = \operatorname{sh}\frac{f}{r}\sin\varphi, \quad x^3 = \operatorname{sh}\frac{z}{r}\operatorname{ch}\frac{f}{r}, \quad x^0 = \operatorname{ch}\frac{z}{r}\operatorname{ch}\frac{f}{r}. \quad (4)$$

Отметим, что если профиль является алгебраической кривой, заданной в однородних координатах уравнением

$$F(x^2, x^3, x^0) = 0, \quad (5)$$

то уравнение поверхности вращения вокруг оси oz будет иметь вид

$$F(\sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}, x^3, x^0) = 0. \quad (6)$$

Для поверхности (4) соотношение (3) приводит к следующему дифференциальному уравнению относительно профиля:

$$r^2 \operatorname{sh}^3\frac{f}{r}\operatorname{ch}\frac{f}{r} f'' - r\operatorname{sh}^4\frac{f}{r}\left[\operatorname{ch}^2\frac{f}{r} + 2f'^2\right] = c\operatorname{ch}^6\frac{f}{r}. \quad (7)$$

Заменой $\operatorname{th}\frac{f}{r} = t$ уравнение (7) приводится к уравнению

$$r^3 t^3 t'' - rt^4 + c = 0. \quad (8)$$

Уравнение

$$t'^2 = \frac{1}{t^2}\left(At^2 + \frac{1}{r^2}t^4 + \frac{c}{r^3}\right), \quad (9)$$

где $A = \text{const}$ является первым интегралом для (8). Положим $\Delta = \frac{4c}{r^5} - A^2$. Интегрируя это уравнение при $\Delta > 0$ и учитывая связь прямоугольных декартовых координат с нормированными вейерштрассовыми координатами [3], получаем

$$\frac{2}{r^2}x^{2^2} + A(x^{0^2} - x^{3^2}) - 2\Delta^* x^3 x^0 \operatorname{ch} c^* - \Delta^* x^{3^2}\operatorname{sh} c^* - \Delta^* x^{0^2}\operatorname{sh} c^* = 0, \quad (10)$$

где $\Delta^* = \sqrt{\frac{4c}{r^5} - A^2}$, c^* — постоянная интегрирования. Если же $\Delta < 0$, то имеем

$$\frac{2}{r^2}x2^2 A(x^{0^2} - x^{3^2}) - 2\bar{\Delta}x^3 x^0 \operatorname{sh}\bar{c} - \bar{\Delta}x^{3^2}\operatorname{ch}\bar{c} - \bar{\Delta}x^{0^2}\operatorname{ch}\bar{c} = 0, \quad (11)$$

$\bar{\Delta} = \sqrt{A^2 - \frac{4c}{r^5}}$, $\bar{c}$ — постоянная интегрирования.

Пользуясь классификацией кривых второго порядка, приведенной в [2], убеждаемся, что уравнение (10) определяет полугиперболу (два корня характеристического уравнения мнимые). Уравнение (11) при $A < 0$ и $c > 0$ определяет либо эллипс, либо вогнутую гиперболу. Если $A > 0$ и $c < 0$, то это уравнение определяет либо выпуклую гиперболу, либо идеальный эллипс.

Таким образом, при $\Delta \neq 0$ уравнением (8) определяются все кривые второго порядка в плоскости Лобачевского, имеющие центр. Пусть теперь $\Delta = 0$, т. е. $A^2 = \frac{4c}{r^5}$. Интегрируя уравнение (9) и переходя к однородным координатам, приходим к уравнению

$$x^{2^2} - \left(e^a \pm \sqrt{\frac{c}{r}}\right)x^{3^2} - \left(e^a \mp \sqrt{\frac{c}{r}}\right)x^{0^2} \mp 2e^a x^0 x^3 = 0, \quad (12)$$

где $a = \mathrm{const}$. Характеристическое уравнение кривых (12) имеет двукратный корень. Как показывает исследование, уравнение (12) при определенных значениях a и c может определять либо эллиптическую параболу, либо вогнутую гиперболическую параболу о двух ветвях, либо вогнутую гиперболическую параболу об одной ветви, либо, наконец, выпуклую гиперболическую параболу. В случае, когда $c = r$, характеристическое уравнение имеет трехкратный корень. При этом имеем либо предельную линию, либо эквидистанту.

Итак, уравнение (8) определяет все кривые второго порядка плоскости Лобачевского.

2). Рассмотрим теперь поверхности вращения первого рода. Эти поверхности описываются трансляцией плоской кривой — профиля — вдоль некоторой прямой — оси вращения. На этих поверхностях параллелями являются эквидистанты. Пусть $y = f(z)$ — уравнение профиля в прямоугольных декартовых координатах. Параметрические уравнения поверхности, описываемой этой кривой при трансляции (вращении) вдоль оси ox, имеют вид

$$
\begin{aligned}
x^1 &= \operatorname{ch}\frac{z}{r}\operatorname{ch}\frac{f(z)}{r}\operatorname{sh}\frac{v}{r},\\
x^2 &= \operatorname{sh}\frac{f(z)}{r},\\
x^3 &= \operatorname{sh}\frac{z}{r}\operatorname{ch}\frac{f(z)}{r},\\
x^0 &= \operatorname{ch}\frac{z}{r}\operatorname{ch}\frac{f(z)}{r}\operatorname{ch}\frac{v}{r}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Если профиль является алгебраической кривой, заданной уравнением (5), то уравнение поверхности трансляции этой кривой вдоль оси ox запишется:

$$F\left(x^2, x^3, \sqrt{x^{0^2} - x^{3^2}}\right) = 0. \tag{14}$$

Можно показать, что поверхности (14) будут поверхностями второго порядка тогда и только тогда, когда кривая (5) будет либо эллипсом, либо выпуклой гиперболой, либо вогнутой гиперболой, либо прямой. При этом трансляция совершается вдоль прямой, проходящей через центр кривой и перпендикулярной к плоскости, в которой лежит кривая. Таким образом, имеем поверхности трансляции второго порядка эллипса, выпуклой и вогнутой гипербол. Для поверхностей трансляции, заданных уравнениями (13), соотношение (3) приводит к следующему дифференциальному уравнению, определяющему профиль:

$$\operatorname{ch}^2\frac{f}{r}\operatorname{sh}\frac{f}{r} + 2\operatorname{sh}\frac{f}{r}f'^2 - \operatorname{ch}\frac{f}{r}f'' = c\left(\operatorname{sh}\frac{f}{r} - \operatorname{th}\frac{z}{r}\,\frac{f'}{\operatorname{ch}\frac{f}{r}}\right). \tag{15}$$

Заменой $\operatorname{th}\frac{f}{r} = t\operatorname{sh}\frac{z}{r}$ (15) можно представить в виде

$$t''\operatorname{sh}\frac{z}{r} + 2t'\operatorname{ch}\frac{z}{r} = c\,\frac{t'^3\operatorname{th}^3\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}^3\frac{z}{r}}.$$

Это уравнение подстановкой $t' \operatorname{sh} \frac{z}{r} = \varphi$ приводится к частному виду уравнения Абеля:

$$\varphi' = -\varphi \operatorname{cth} \frac{z}{r} + c\varphi^3 \operatorname{th}^3 \frac{z}{r}. \tag{16}$$

Проинтегрировав уравнение (16) и совершив после этого переход к однородным координатам, получаем уравнение

$$(x^2 - Ax^3)^2 - c^* x^{3^2} - 2x^0 x^3 = 0. \tag{15}$$

где A, c^* — постоянные интегрирования.

Таким образом, профиль поверхностей трансляции, для которых имеет место соотношение (3) является кривой второго порядка.

Как показывают исследования, уравнение (15) при всех возможных значениях A, c^* определяет как центральные кривые второго порядка, так и некоторые нецентральные кривые второго порядка, откуда следует что среди поверхностей вращения I рода (трансляции), для которых выполняется теорема Боне, существуют поверхности, не являющиеся поверхностями второго порядка.

3). Поверхности вращения II рода характеризуются тем, что их параллелями являются предельные линии. Если кривая $y = f(z)$ является профилем, то параметрические уравнения поверхности вращения имеют вид [4]:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= e^{-\frac{z}{r}} \operatorname{ch} \frac{f}{r} v, \\
x^2 &= \operatorname{sh} \frac{f}{r}, \\
x^3 &= \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{r}} \operatorname{ch} \frac{f}{r} v^2 + \operatorname{sh} \frac{z}{r} \operatorname{ch} \frac{f}{r}, \\
x^0 &= \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{r}} \operatorname{ch} \frac{f}{r} v^2 + \operatorname{ch} \frac{z}{r} \operatorname{ch} \frac{f}{r}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Поверхность (16) получане следующим образом. Рассматривается однопараметрическое семейство плоскостей, параллельных координатной плоскости (yoz) в направлении оси oz, со следами в плоскости (xoz), параллельными этой оси. Однопараметрическое семейство ортогональных траекторий этого семейства плоскостей, проходящих через заданный профиль $y = f(z)$, и определяет поверхность (16). Условно можно считать, что в этом случае имеется несобственный центр вращения, под которым понимаем общую точку параллельных между собою плоскостей; ось вращения касается абсолюта в этой несобственной точке.

Пусть профиль поверхности вращения есть алгебраическая кривая (5). Уравнение поверхности вращения второго рода будет иметь вид:

$$F\left(x^2, x^3 - \frac{x'^2}{2(x^0 - x^3)}, \ x^0 - \frac{x'^2}{2(x^0 - x^3)}\right) = 0. \tag{17}$$

Устанавливаем, что поверхность (17) будет поверхностью второго порядка тогда и только тогда, когда профиль является прямой. Соотношение (3) для этого рода поверхностей вращения приводит снова к некоторым кривым второго порядка. Эти кривые не будут порождать поверхности второго порядка при описанном выше способе определения поверхностей вращения второго рода.

Таким образом, как и в предыдущем случае, приходим к выводу: среди поверхностей вращения второго рода, для которых выполняется теорема Боне, существуют поверхности, не являющиеся поверхностями второго порядка. Поверхности второго порядка общего вида могут быть получены из соответствующих поверхностей вращения некоторым преобразованием («равномерным сжатием»). При этом преобразовании компоненты тензора Θ_{hij} приобретают общий множитель. Следовательно, если Θ_{hij} равен нулю для поверхностей вращения второго порядка, то он будет равен нулю и для соответствующих поверхностей второго порядка в пространстве Лобачевского, так же, как и в евклидовом случае [1], тензор Θ_{hij} тождественно равен нулю.

Из всего предыдущего видим, что в пространстве Лобачевского класс поверхностей Дарбу не исчерпывается поверхностями второго порядка. Поэтому можем заключить, что *равенство нулю тензора* Θ_{hij} *является необходимым дифференциально-геометрическим признаком поверхностей второго порядка в пространстве Лобачевского.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган, Основы теории поверхностей, ч. II, Гостехиздат, М., 1948.
2. В. Ф. Каган, Основания геометрии, ч. II, Гостехиздат, М., 1956.
3. О. С. Смогоржевський, Основи геометрії, Вид-во «Радянська школа», К., 1954.
4. Б. С. Вакарчук. Диференціальні рівняння ортогональних траєкторій однопараметричного сімейства площин в просторі Лобачевського, Наук. зап. Чернівецьк. держ. ун-ту, т. 3, 1958.

Поступила 25.V 1962 г.
Днепропетровск