Подсчет количества деревьев по высоте и степени

Н. Г. Винниченко

1. Пусть $M(p, \gamma)$ — множество неизоморфных деревьев, высоты которых равны p, а степени узловых точек $\leqslant \gamma$ [1, 2, 4].

Определим количество $Z''(p, \gamma)$ элементов множества $M(p, \gamma)$ при условии, что p и γ конечные. Смежную с корневой точкой точку A_0 можно рассматривать как корневую точку ветвей высоты $\leqslant p-1$, отходящих от A_0.

Лемма. Пусть $Z''(p, h; \gamma)$ — количество неизоморфных деревьев, содержащих две, отходящих от точки A_0, ветви с высотами $p-1$ и h $(0 \leqslant h \leqslant p-1)$ и степенями точек $\leqslant \gamma$.

Тогда

$$Z''(p, h; \gamma) = \begin{cases} Z''(p-1, \gamma) \cdot Z''(h, \gamma) & \text{при } h < p-1 \\ f(Z''(p-1, \gamma), 2) & \text{при } h = p-1 \end{cases} \tag{1}$$

где $f(Z''(p-1, \gamma), 2)$ — количество сочетаний с повторением из $Z''(p-1, \gamma)$ элементов по 2, [3].

Доказательство.

а) $h < p-1$.

Обозначим элементы множества $M(p-1, \gamma)$ через $a_1, a_2, \ldots, a_{Z''(p-1, \gamma)}$, элементы множества $M(h, \gamma)$ через $b_1, b_2, \ldots, b_{Z''(h, \gamma)}$. Тогда элементами множества $M(p, h; \gamma)$ деревьев, удовлетворяющим условиям леммы, будут пары $(a_i b_j)$ $(i = 1, 2, \ldots, Z''(p-1, \gamma);\ j = 1, 2, \ldots, Z''(h, \gamma))$.

Количество таких пар будет $Z''(p-1, \gamma) \cdot Z''(h, \gamma)$.

Так как множество $M(p-1,\gamma \cup M(h,\gamma)$ не содержит изоморфных элементов, то их нет и среди элементов множества $M\ (p,\ h;\ \gamma)$.

б) $h = p - 1$.

В этом случае каждому элементу $a_i \in M(p-1,\ \gamma)$ найдется один изоморфный элемент $b_j \in M(h,\ \gamma)$ и наоборот. Так как множества $M(p-1,\ \gamma)$ и $M(h,\ \gamma)$ имеют равные количества элементов, то их можно перенумеровать так, что

$$a_i \quad \text{изоморфно} \quad b_j \quad \text{при} \quad i = j,$$

$$a_i \quad \text{неизоморфно} \quad b_j \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

$(a_i b_j)$ изоморфно $(a_j b_i)$. Поэтому число неизоморфных между собой элементов $(a_i b_j) \in M\,(p, h; \gamma)$ равно числу сочетаний с повторением из $Z''\,(p-1, \gamma)$ элементов по 2.

2. Доказанная лемма позволяет подсчитать количество $S'(k)$ деревьев высоты p степени $\leqslant \gamma$ и в том случае, когда степень точки A_0 равна $k+1$ $(1 \leqslant k \leqslant \gamma - 1)$. Пусть из точки A_0 выходит m_{p-1} ветвей высоты $h_{p-1} = p-1$, m_1 ветвей высоты $h_1, \ldots, m_i$ ветвей высоты h_i.
Очевидно, должны иметь место следующие соотношения:

а) $0 \leqslant h_i \leqslant p-2$;

б) $m_{p-1} \geqslant 1$;

в) $m_{p-1} + m_1 + \ldots + m_i = k$.

На основании леммы, при таком наборе ветвей количество деревьев будет

$$f\,(Z''\,(p-1, \gamma),\ m_{p-1}) \cdot f\,(Z''\,(h_1, \gamma), m_1) \ldots f\,(Z''\,(h_i, \gamma), m_i).$$

Сумма таких произведений, при различных m_i, h_i, удовлетворяющих условиям а), б), в), даст количество $S'(k)$ деревьев с выходящими из точки A_0 k ветвями:

$$S'\,(k) = \sum_{i=1}^{k} f\,(Z''\,(p-1, \gamma), i) \cdot S''(k-i), \tag{2}$$

где $S''\,(0) = 1$,

$$S''\,(k-i) = \sum_{h_j, m_j} f\,(Z''\,(h_1, \gamma), m_1)\, f\,(Z''\,(h_2, \gamma), m_2) \ldots f\,(Z''\,(h_j, \gamma), m_j); \tag{3}$$

суммирование ведется по всем числам m_j и h_j, удовлетворяющим условиям:

а') $0 \leqslant h_j \leqslant p-2$;

b') $m_1 + m_2 + \ldots + m_j = k - i$.

Просуммировав $S'\,(k)$ по k от 1 до $\gamma - 1$, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Количество $Z''\,(p, \gamma)$ деревьев высоты p степени $\leqslant \gamma$ подсчитывается по формуле*

$$Z''\,(p, \gamma) = \sum_{k=1}^{\gamma-1} \sum_{i=1}^{k} f\,(Z''\,(p-1, \gamma), i) \cdot S''\,(k-i), \tag{4}$$

где $f\,(Z''\,(p-1, \gamma), i)$ — количество сочетаний с повторением из $Z''\,(p-1, \gamma)$ элементов по i; $S''\,(k-i)$ — подсчитывается по формуле (3).

Следствия. 1. Количество $Z(p, \gamma)$ деревьев высоты p, степени внутренних точек которых $=\gamma$, подсчитывается по формуле

$$Z(p, \gamma) = \sum_{i=1}^{\gamma-1} f(Z(p-1, \gamma), i) \cdot S'''(\gamma - i - 1), \tag{5}$$

где $S'''(\gamma - i - 1)$ получают заменой $Z''(p, \gamma)$ на $Z(p, \gamma)$ в формуле (3).

2. Количество $Z_r(\gamma)$ деревьев радиуса r, степени $\leqslant \gamma$ подсчитывается по формуле

$$Z_r(\gamma) = \sum_{k=2}^{\gamma} \sum_{i=2}^{k} f(Z''(p-1, \gamma), i) \cdot S''(k-i). \tag{6}$$

Примечание. Формулы (4), (5), (6) рекуррентные. Имеется в виду, что

$$Z''(0, \gamma) = 1, \quad Z''(1, \gamma) = \gamma - 1,$$
$$Z(0, \gamma) = 1, \quad Z(1, \gamma) = 1.$$

3. Изложенное выше и теорема 1 из [4] позволяют найти формулу для подсчета количества деревьев высоты p степени $\leqslant\gamma$ с отмеченным стволом, т. е. таких деревьев, которые, кроме точки $A_{кор}$, имеют еще одну, отмеченную точку высоты p.

Способностью K_h' [4] точки A_h высоты h ствола дерева будем называть количество деревьев высоты p степени $\leqslant \gamma$, удовлетворяющих условиям:

1) степень точки $A_h \leqslant \gamma$;

2) степени остальных внутренних точек ствола равны 2.

Пусть из точки A_h выходит k ветвей ($0 < k \leqslant \gamma - 2$), высоты которых $\leqslant p - h - 1$. Если среди них m_1 ветвей имеют высоту h_1, m_2 ветвей имеют высоту h_2. . . ., m_i — высоту h_i, при

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_i = k, \quad h_1, h_2, \ldots, h_i \leqslant p - h - 1,$$

то количество неизоморфных деревьев, которые дает точка A_h, в этом случае, будет

$$f(Z''(h_1, \gamma), m_1) \cdot f(Z''(h_2, \gamma), m_2) \ldots f(Z''(h_i, \gamma), m_i).$$

Значит способность K_h' определится как сумма всех таких возможных произведений. Учитывая, что для дерева, имеющего ветви только в точке A_h, нет изоморфных деревьев с ветвями в любой другой точке $A_{h'}$ ствола ($h \neq h'$) [4], получаем:

Теорема 2. *Количество $Z_s(p, \gamma)$ деревьев с отмеченным стволом высоты p степени $\leqslant \gamma$ подсчитывается по формуле*

$$Z_s(p, \gamma) = \varphi(K_h'),$$

где $\varphi(K_h')$ — сумма всех возможных произведений по $1, 2, \ldots, p+1$ множителей $K_0', K_1', \ldots, K_p'$ (каждое слагаемое имеет множитель $K_p' = 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Polya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math., **68**, 1937, 145.

2. К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.

3. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М. 1963.

4. Н. Г. Винниченко, К перечислению деревьев с отмеченным стволом, Тр. научн. конференции инж., асп., мл. научн. сотр. Ин-та матем. АН УССР, Изд-во АН УССР, К., 1964.

Поступила 15.V 1963 г.
Киев