Замечание о формуле для определения линейного порядка целой функции, представленной рядом Дирихле

Ф. И. Гече

Пусть $f(z)$ — целая функция, представленная абсолютно сходящимся в конечной z-плоскости рядом Дирихле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(\lambda_n z) \quad (0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \lambda_n \to \infty, \ z = x + iy). \tag{1}$$

Линейный порядок ϱ_f функции $f(z)$ определяется формулой

$$\varrho_f = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\ln \ln M(x)}{x}, \tag{2}$$

где

$$M(x) = \sup_{-\infty < y < \infty} |f(x + iy)|.$$

Обозначим через ϱ_f' число

$$\varrho_f' = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln |a_n|^{-1}}. \tag{3}$$

Ритт [1] показал, что при условии

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n}{\ln n} > 0 \tag{4}$$

имеет место равенство $\varrho_f = \varrho_f'$.

Независимо от Ритта это же равенство доказал Сугимура [2] при более слабом предположении относительно λ_n, а именно при условии*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln n} = \infty. \tag{5}$$

Далее, Сугимура показал (см. теорему 4 из [2]), что если

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln n} < \infty, \tag{6}$$

то возможно неравенство $\varrho_f' < \varrho_f$. Вопрос о том, не будет ли достаточным для справедливости равенства $\varrho_f = \varrho_f'$ выполнение соотношения

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln n} = \infty,$$

остался открытым.

Недавно появилась работа Аспейтия [3], посвященная доказательству равенства $\varrho_f = \varrho_f'$ при условии (5). Очевидно, Аспейтия не была известна статья Сугимура, так как он говорит только об усилении результата Ритта. Кроме того, Аспейтия в своей работе отметил, что его метод доказательства не позволяет ослабить условие (5).

---

* Условие (5) в работе [2] записано в несколько иной форме: $\sum_{\lambda_n < x} 1 = O(x^{\varrho x})$, независимо от числа ϱ $(0 < \varrho < \infty)$.

Мы построим пример целой функции, который показывает, что ограничение (5) является существенным для справедливости равенства $\varrho_f = \varrho_f'$ (безотносительно к методу доказательства). А именно, докажем следующее.

Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\omega_n \uparrow \infty$, *существует целая функция* $f(z)$, *представленная рядом* (1), *такая, что*: 1) *на некоторой последовательности натуральных чисел* $\{n_k\}$ *выполняются равенства*

$$\frac{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}}{\ln n_k} = \omega_{n_k}, \tag{6a}$$

2) *имеет место неравенство* $\varrho_f' < \varrho_f$ $(\varrho_f > 0)$.

Очевидно, что для $f(z)$ с указанными свойствами не должно выполняться (5), т. е. справедливо

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln n} < \infty. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\{p_k\}$ — некоторая подпоследовательность натурального ряда чисел, такая, что существуют сколь угодно большие натуральные числа, не принадлежащие $\{p_k\}$; p_1, $\omega_{p_1} \geqslant 2$.

Образуем последовательности целых положительных чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &n_1 = p_1, && m_1 = [n_1^{\omega_{n_1}}] - n_1, \\ &n_2 = p_2 + m_1, && m_2 = [n_2^{\omega_{n_2}}] - n_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &n_k = p_k + \sum_{i=1}^{k-1} m_i, && m_k = [n_k^{\omega_{n_k}}] - n_k, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Нетрудно выбрать строго возрастающую последовательность положительных чисел $\{\lambda_j'\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\frac{\lambda'_{p_k} \ln \lambda'_{p_k}}{\ln n_k} = \omega_{n_k} \tag{8}$$

и

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\lambda_j' \ln \lambda_j'}{\ln j} = \infty. \tag{9}$$

Очевидно,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda'_{p_k} \ln \lambda'_{p_k}}{\ln (n_k + m_k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{\lambda'_{p_k} \ln \lambda'_{p_k}}{\omega_{n_k} \ln n_k} = 1. \tag{10}$$

Образуем последовательность положительных чисел $\{b_j\}$ со свойством

$$\varrho_2 = \varlimsup_{\substack{j \to \infty \\ j \neq p_k}} \frac{\lambda_j' \ln \lambda_j'}{- \ln b_j} < \lim_{k \to \infty} \frac{\lambda'_{p_k} \ln \lambda'_{p_k}}{- \ln b_{p_k}} = \varrho_1. \tag{11}$$

Очевидно, ряд

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \exp (\lambda_j' z) \tag{12}$$

абсолютно сходится в конечной z-плоскости и представляет целую функцию Кроме того, учитывая соотношения (9) и (11), видим, что из результата Су гимура следуют равенства $\varrho_\varphi = \varrho'_\varphi = \varrho_1$.

Обозначим через ε_k величину

$$\varepsilon_k = \min\left\{\frac{1}{m_k}, \frac{1}{m_k+1}(\lambda'_{p_k+1} - \lambda'_{p_k})\right\} \tag{13}$$

и образуем последовательность сумм

$$\alpha_k(z) = \frac{b_{p_k}}{m_k+1}\exp(\lambda'_{p_k}z) + \frac{b_{p_k}}{m_k+1}\exp[(\lambda'_{p_k}+\varepsilon_k)z] + \ldots +$$
$$+ \frac{b_{p_k}}{m_k+1}\exp[(\lambda'_{p_k}+m_k\varepsilon_k)z] = a_{n_k}\exp(\lambda_{n_k}z) + a_{n_k+1}\exp(\lambda_{n_k+1}z) +$$
$$+ \ldots + a_{n_k+m_k}\exp(\lambda_{n_k+m_k}z). \tag{14}$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \exp(\lambda_i z) = \sum_{j\neq p_k} b_j \exp(\lambda'_j z) + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(z), \tag{15}$$

где $\lambda_1 < \lambda_1 < \ldots$

Полученная функция удовлетворяет условиям 1) и 2).

Действительно, из равенств (14) и $n_k = p_k + m_1 + \ldots + m_{k-1}$ следует что $\lambda'_{p_k} = \lambda_{n_k}$, следовательно, из соотношений (8) следуют равенства (6а) Далее, учитывая (11) и соотношения

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{\lambda'_j x} \leqslant f(x) = M(x) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{(\lambda'_j+1)x},$$

получаем равенства $\varrho_f = \varrho_\varphi = \varrho_1$.

Но с другой стороны, из соотношений (3), (11), (14) и (15) следует, что $\varrho'_f = \max(\varrho_2, \varrho_3)$, где

$$\varrho_3 = \lim_{k\to\infty}\frac{(\lambda'_{p_k}+1)\ln(\lambda'_{p_k}+1)}{\ln\frac{m_k+1}{b_{p_k}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda'_{p_k}\ln\lambda'_{p_k}}{-\ln b_{p_k} + \ln([n_k^{\omega_{n_k}}] - n_k + 1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda'_{p_k}\ln\lambda'_{p_k}}{-\ln b_{p_k} + \omega_{n_k}\ln n_k} = \frac{\varrho_1}{\varrho_1+1}.$$

Следовательно, имеет место неравенство $\varrho'_f < \varrho_f$.

Замечание 1. Условие (7) является только необходимым для того чтобы $\varrho'_f < \varrho_f$, но не достаточным. Чтобы получить пример, подтверждающиі это утверждение, достаточно в условии (11) взять $\varrho_2 = \varrho_1$.

Замечание 2. Обозначим через

$$\underline{D}(n_k) = \underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{k}{n_k}, \quad \overline{D}(n_k) = \overline{\lim}\frac{k}{n_k}$$

соответственно нижнюю и верхнюю плотности подпоследовательности индек сов n_k, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\zeta(n_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{n_k}\ln\lambda_{n_k}}{\ln n_k} = \infty. \tag{16}$$

Если $\underline{D}(n_k) = \overline{D}(n_k)$, то их общее значение называется плотностью $D(n_k)$.

Для произвольной целой функции $f(z)$, представленной рядом (1), для которой

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln n} = C < \infty,$$

имеет место равенство $\underline{D}(n_k) = 0$.

Действительно, пусть λ_{n_l} удовлетворяет неравенству

$$\frac{\lambda_{n_l} \ln \lambda_{n_l}}{\ln n_l} \leqslant C + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0,$$

и $\lambda_{n_{k_l}}$ — первый член подпоследовательности $\{\lambda_{n_k}\}$, удовлетворяющей условию (16), для которого выполняется неравенство $\lambda_{n_{k_l}} > \lambda_{n_l}$. Легко подсчитать, что в этом случае имеет место неравенство

$$\frac{k_l}{n_{k_l}} < \frac{n_{k_l} + 1}{n_{k_l}^{\zeta(n_{k_l})C+\varepsilon}},$$

откуда следует наше утверждение.

Из этого утверждения следует, что при $D(n_k) > 0$ выполняется условие (5), следовательно, $D(n_k) = 1$, и согласно [2] и [3] имеет место равенство $\varrho_f = \varrho_f'$.

С другой стороны, выбирая в построенном нами примере последовательность $\{p_k\}$ достаточно быстро растущей, можем получить пример функции, для которой $\overline{D}(n_k) = 1$ и $\varrho_f' < \varrho_f$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. F. Ritt, On certain points of the theory of Dirichlet series, Amer. J. Math., vol. 50, 1928, 73—86.

2. K. Sugimura, Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen, Math. Zeitschrift, 29, 1929, 264—277.

3. A. G. Azpeitia, A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series, Proc. Amer, Math. Soc., 12, 1961, № 5, 722—723.

Поступила 11.I 1964 г.
Львов