Об одноклеточности диссипативных вольтерровых операторов

Г. Э. Кисилевский

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H = L^2\ (0,\ l)$ интегральный оператор вида

$$Af(x) = 2i \int\limits_x^l f(t)\, K(t, x)\, dt. \qquad (1)$$

Обозначим через $H_\alpha\ (0 \leqslant \alpha \leqslant l)$ подпространство функций из $L^2(0,\ l)$, равных нулю почти везде на промежутке $(\alpha,\ l)$. Очевидно, что каждое из подпространств H_α инвариантно относительно оператора A.

Оператор A называется одноклеточным, если иных инвариантных подпространств он не имеет.

Признаки одноклеточности интегральных операторов вида (1) изучались ранее в работах М. С. Бродского [1] и Л. А. Сахновича [2, 3, 4], однако в них либо требовалось существование частных производных некоторого порядка от функции $K(t,\ x)$, либо функция $K(t,\ x)$ предполагалась в некотором смысле кусочно постоянной.

В настоящей статье рассматривается ядро вида

$$K(t,x)=\xi(t)\,\xi^*(x)\qquad (\xi(t)=\|\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\varphi_k(t),\ldots\|,\ \xi(t)\,\xi^*(t)\equiv 1)$$

и доказывается теорема.

Теорема. *Если выполняются условия:*

1) *функции* $\varphi_k(t)$ *имеют на сегменте* $[0,l]$ *ограниченные вариации* V_k, *причем ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k$ *сходится,*

2) $\xi(t-0)\cdot\xi^*(t+0)\neq 0$* *в каждой точке интервала* $(0,\ l)$, *то оператор* (1) *одноклеточен.*

Рассмотрим характеристическую матрицу-функцию [5] оператора (1)

$$W(z)=\overset{\curvearrowleft}{\int_0^l} e^{2izdE(t)}=\lim_{\max\Delta t_k\to 0} e^{2iz\Delta E_n}\ldots e^{2iz\Delta E_2}e^{2iz\Delta E_1},\tag{2}$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=l$ — произвольное разбиение сегмента $[0,\ l]$,

$$E(t)=\int_0^t P(x)\,dx,\qquad P(x)=\xi^*(x)\,\xi(x),\qquad \Delta E_k=E(t_k)-E(t_{k-1}),$$

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Легко видеть, что значениями матрицы-функции $P(t)$ являются проекционные матрицы ранга 1.

Из (2) следует, что при всех z справедливо неравенство

$$\|W(z)\|\leqslant e^{2l|z|}.\tag{3}$$

Согласно критерию М. С. Бродского [1] оператор (1) будет одноклеточным, если знак равенства в (3) достигается в том смысле, что для любого $\varepsilon>0$ найдется последовательность $z_k\to\infty$, для которой

$$\|W(z_k)\|>e^{(2l-\varepsilon)|z_k|}.$$

В силу условия 1) матрица-функция $P(t)$ имеет на сегменте $[0,l]$ ограниченную вариацию в том смысле, что

$$V=\sup\sum_{k=0}^{n-1}\|P(t_{k+1})-P(t_k)\|<\infty\qquad (0=t_0<t_1<\ldots<t_n=l).\tag{4}$$

Поэтому характеристическую матрицу-функцию можно представить, как легко видеть, в виде мультипликативного интеграла Римана

$$W(z)=\overset{\curvearrowleft}{\int_0^l} e^{2izP(t)\,dt}=\lim_{\max\Delta t_k\to 0} e^{2izP(\tau_n)\Delta t_n}\ldots e^{2izP(\tau_2)\Delta t_2}e^{2izP(\tau_1)\Delta t_1}\tag{5}$$

$$(t_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant t_k).$$

Без ограничения общности можно считать, что матрица-функция $P(t)$ непрерывна слева в каждой точке полуинтервала $(0,\ l]$ и справа в точке 0.

Через $V(t)$ обозначим вариацию матрицы-функции $P(t)$ на сегменте $[0,\ t]$:

$$V(t)=\sup\sum_{k=0}^{n-1}\|P(t_{k+1})-P(t_k)\|\qquad (0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t).$$

---

* Заметим, что условие 2 существенно, так как известны [5] неодноклеточные операторы, для которых $\xi(t_0-0)\,\xi^*(t_0+0)=0$ в единственной точке $t_0\in(0,\ l)$.

Допустим, что знак равенства в (3) не достигается в указанном выше смысле, т. е. существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\| W(z) \| \leqslant e^{(2l-\varepsilon_0)\,|z|}(|z| > M).$$

Тогда

$$A(y) = W(iy)\, e^{2yl} \leqslant e^{\varepsilon_0 y} \qquad (y < 0,\ |y| > M),$$

и, следовательно, $\lim\limits_{y \to -\infty} \| A(y) \| = 0$. Поэтому для доказательства одноклеточности оператора (1) достаточно установить, что $\| A(y) \|$ не стремится к нулю при $y \to -\infty$.

Разобьем сегмент $[0, l]$ на равные части точками $t_k = \frac{kl}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и рассмотрим последовательность интегральных произведений интеграла (5)

$$W_n(iy) = e^{-2yP_n \cdot \frac{l}{n}} \ldots e^{-2yP_2 \cdot \frac{l}{n}} e^{-2yP_1 \cdot \frac{l}{n}} \qquad (P_k = P(t_k)).$$

Тогда $A(y)$ будет пределом последовательности

$$A_n(y) = W_n(iy)\, e^{2yl} = e^{\frac{-2yl}{n} P_n} e^{\frac{2yl}{n} I} \ldots e^{\frac{-2yl}{n} P_2} e^{\frac{2yl}{n} I} e^{\frac{-2yl}{n} P_1} e^{\frac{2yl}{n} I} =$$

$$= e^{\frac{2yl}{n} Q_n} \ldots e^{\frac{2yl}{n} Q_2} e^{\frac{2yl}{n} Q_1} \qquad (Q_k = I - P_k).$$

Так как $P_k^2 = P_k$, то $Q_k^2 = Q_k$ и

$$e^{\frac{2yl}{n} Q_k} = I + \frac{2yl}{n} Q_k + \frac{1}{2!}\left(\frac{2yl}{n}\right)^2 Q_k + \ldots = P_k + e^{\frac{2yl}{n}} Q_k.$$

Вводя обозначение $R_k = e^{\frac{2yl}{n}} Q_k$, получаем

$$A_n(y) = (P_n + R_n) \ldots (P_2 + R_2)(P_1 + R_1).$$

Лемма 1°. *Существуют такие точки* $0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_{s+1} = l$, *что*

$$V(l_{i+1}) - V(l_i) < 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, s).$$

Доказательство. Допуская противное, найдем такие последовательности $\{t_n'\}$ и $\{t_n''\}$ $(0 \leqslant t_n' < t_n'' \leqslant l,\ \lim t_n' = \lim t_n'' = t_0)$, что $V(t_n'') - V(t_n') \geqslant 1$. Так как функция $V(t)$ непрерывна слева, то $t_0 \neq l$, и, следовательно,

$$V(t_0 + 0) - V(t_0) \geqslant 1.$$

С другой стороны,

$$V(t_0 + 0) - V(t_0) = \| P(t_0 + 0) - P(t_0) \| < 1,$$

так как $P(t_0)$ и $P(t_0 + 0)$ — проекторы ранга 1 и $P(t_0) P(t_0 + 0) \neq 0$.

Лемма 2°. *Существует такое постоянное число* $k_0 > 0$, *что выполняется неравенство*

$$\| P_n \ldots P_2 P_1 \| \geqslant k_0$$

для всех достаточно больших n.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $V = V(l) - V(0) < 1$. Вводя обозначение $\pi_n = P_n \ldots P_2 P_1$ и рассматривая разность

$$\pi_n^* \pi_n - P_1 = P_1 P_2 \ldots P_{n-1} P_n P_{n-1} \ldots P_2 P_1 - P_1 = \sum_{k=1}^{n-1} P_1 P_2 \ldots P_k (P_{k+1} - P_k) P_k \ldots P_2 P_1,$$

получаем неравенство

$$\| \pi_n^* \pi_n - P_1 \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| P_{k+1} - P_k \| \leqslant V;$$

отсюда

$$\| \pi_n \| \geqslant \| \pi_n \|^2 = \| \pi_n^* \pi_n \| \geqslant \| P_1 \| - \| \pi_n^* \pi_n - P_1 \| \geqslant 1 - V = k_0 > 0.$$

Таким образом, при $V < 1$ неравенство $\| \pi_n \| \geqslant k_0$ выполняется для любого n.

Если $V \geqslant 1$, то в силу леммы 1° существуют такие точки $0 = l_0 < < l_1 < \ldots < l_{s+1} = l$, что

$$V_{i+1} = V(l_{i+1}) - V(l_i) < 1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, s).$$

Пользуясь тем, что $\| P(l_i) P(l_i + 0) \| \geqslant k_1 > 0$, найдем число $\delta > 0$ так, чтобы для любых $0 \leqslant \xi \leqslant \delta$, $0 \leqslant \eta \leqslant \delta$ выполнялись неравенства

$$\| P(l_i - \xi) P(l_i + \eta) \| \geqslant \frac{1}{2} k_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Пусть $t_k = \dfrac{kl}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — разбиение сегмента $[0, l]$, диаметр которого $\dfrac{l}{n} < \min\{\delta;\ l_1 - l_0,\ l_2 - l_1, \ldots, l_{s+1} - l_s\}$. Найдем для каждого l_i $(i = = 1, 2, \ldots, s)$ такую точку t_{k_i}, что $t_{k_i} \leqslant l_i < t_{k_i+1}$, и рассмотрим произведение

$$\pi_n = (P_n \ldots P_{k_s+1})(P_{k_s} \ldots P_{k_{s-1}+1}) \ldots (P_{k_2} \ldots P_{k_1+1})(P_{k_1} \ldots P_1).$$

Так как

$$V(t_{k_{i+1}}) - V(t_{k_i+1}) \leqslant V(l_{i+1}) - V(l_i) = V_{i+1} < 1,$$

то

$$\| P_{k_{i+1}} \ldots P_{k_i+1} \| \geqslant 1 - V_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1);$$

аналогично

$$\| P_n \ldots P_{k_s+1} \| \geqslant 1 - V_{s+1}, \qquad \| P_{k_1} \ldots P_1 \| \geqslant 1 - V_1;$$

а так как $t_{k_i+1} - t_{k_i} < \delta$ и $l_i \in [t_{k_i}, t_{k_i+1}]$, то

$$\| P_{k_i+1} P_{k_i} \| \geqslant \frac{1}{2} k_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Учитывая, что P_{k_i} и P_{k_i+1} — проекторы ранга 1, получаем

$$\| \pi_n \| = \| P_n \ldots P_{k_s+1} \| \cdot \| P_{k_s+1} P_{k_s} \| \cdot \| P_{k_s} \ldots P_{k_{s-1}+1} \| \ldots \| P_{k_2} \ldots P_{k_1+1} \| \times$$

$$\times \| P_{k_1+1} P_{k_1} \| \cdot \| P_{k_1} \ldots P_1 \| \geqslant \left(\frac{k_1}{2} \right)^s \cdot (1 - V_1) \ldots (1 - V_{s+1}) = k_0 > 0.$$

Лемма 3°. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $N > 0$ и $M < 0$, что для всех $n > N$, $y < M$ будет выполняться неравенство*

$$\| A_n(y) - P_n \ldots P_2 P_1 \| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как функция $V(t)$ не убывает и непрерывна слева в $(0, l]$, а в точке 0 непрерывна справа, то можро найти такое число $\delta > 0$ и такие точки $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\alpha = l$, что будут выполняться следующие условия.

1) сегменты $[0, \delta]$, $[\tau_1-\delta, \tau_1], \ldots, [\tau_\alpha-\delta, \tau_\alpha]$, $[l-\delta, l]$ не пересекаются;

2) $$[V(\delta)-V(0)]+\sum_{i=1}^{\alpha}[V(\tau_i)-V(\tau_i-\delta)]+[V(l)-V(l-\delta)]<\frac{\varepsilon}{4(V+1)}=$$

$=\varepsilon_1$;

3) $|V(t'')-V(t')|<\varepsilon_1$, если $|t''-t'|<\delta$ и $\tau_i \overline{\in} [t', t'']$ $(i=1,2,\ldots,\alpha)$.

Наконец, обозначим через M любое отрицательное число, удовлетворяющее неравенству

$$e^{\delta M}<\frac{\varepsilon}{2(V+1)^2},$$

и пусть $n>\frac{2l}{\delta}=N$, $y<M$. Рассмотрим равенство

$$A_n(y)=(P_n+R_n)\ldots(P_2+R_2)(P_1+R_1)=(P_n+R_n)\ldots(P_2+R_2)P_1+$$
$$+(P_n+R_n)\ldots(P_2+R_2)R_1=P_n\ldots P_2P_1+\sum_{k=1}^{n-1}R_n\ldots R_{k+1}P_k\ldots P_1+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-k-1}(P_n+R_n)\ldots(P_{k+s+2}+R_{k+s+2})P_{k+s+1}R_{k+s}\ldots R_{k+1}P_k\ldots P_1+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}(P_n+R_n)\ldots(P_{k+2}+R_{k+2})R_{k+1}R_k\ldots R_1+R_n\ldots R_2R_1.$$

Учитывая, что $\|P_k+R_k\|=1$, получаем

$$\|A_n(y)-P_n\ldots P_2P_1\|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\|R_n\ldots R_{k+1}P_k\|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-k-1}\|P_{k+s+1}R_{k+s}\ldots R_{k+1}P_k\|+\sum_{k=1}^{n-1}\|P_{k+1}R_k\ldots R_1\|+\|R_n\ldots R_2R_1\|.$$

Так как

$$\|P_{k+1}Q_k\|=\|P_{k+1}(P_{k+1}-P_k)\|\leqslant\|P_{k+1}-P_k\|,$$

то

$$\|P_{k+1}R_k\|\leqslant e^{\frac{2yl}{n}}\cdot\|P_{k+1}-P_k\|,$$

и, следовательно,

$$\|A_n(y)-P_n\ldots P_2P_1\|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}e^{\frac{2(n-k)yl}{n}}\|P_{k+1}-P_k\|+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{s=1}^{n-k-1}e^{\frac{2syl}{n}}\|P_{k+s+1}-P_{k+s}\|\cdot\|P_{k+1}-P_k\|+ \tag{6}$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}e^{\frac{2kyl}{n}}\|P_{k+1}-P_k\|+e^{2yl}.$$

Отнесем сумму

$$\|P_{k+1}-P_k\|\cdot\sum_{s=1}^{n-k-1}e^{\frac{2syl}{n}}\|P_{k+s+1}-P_{k+s}\|\qquad(k=1,2,\ldots,n-2)$$

к первой категории, если сегмент $[t_k, t_{k+1}]$ полностью содержится в одном из сегментов $[0, \delta]$, $[l-\delta, l]$, $[\tau_i-\delta, \tau_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha)$, и ко второй категории — в противном случае.

Если рассматриваемая сумма при некотором k принадлежит ко второй категории, то, выбирая m из условия $\frac{ml}{n} < \frac{\delta}{2} \leqslant \frac{(m+1)l}{n}$, представим ее следующим образом

$$\|P_{k+1}-P_k\| \cdot \sum_{s=1}^{n-k-1} e^{\frac{2syl}{n}} \|P_{k+s+1}-P_{k+s}\| =$$

$$= \|P_{k+1}-P_k\| \cdot \left[\left(e^{\frac{2yl}{n}} \|P_{k+2}-P_{k+1}\| + \ldots + e^{\frac{2myl}{n}} \|P_{k+m+1}-P_{k+m}\|\right) + \right.$$

$$\left. + \left(e^{\frac{2(m+1)yl}{n}} \|P_{k+m+2}-P_{k+m+1}\| + \ldots + e^{\frac{2(n-k-1)yl}{n}} \|P_n-P_{n-1}\|\right)\right].$$

Допустим, что на сегменте $[t_{k+1}, t_{k+m+1}]$ лежит одна из точек τ_i. Так как $\frac{l}{n} < \frac{\delta}{2}$, то длина сегмента $[t_k, t_{k+m+1}]$ меньше δ, значит, $[t_k, t_{k+1}] \subset \subset [\tau_i-\delta, \tau_i]$, что противоречит определению суммы второй категории. Поэтому

$$e^{\frac{2yl}{n}} \|P_{k+2}-P_{k+1}\| + \ldots + e^{\frac{2myl}{n}} \|P_{k+m+1}-P_{k+m}\| < \|P_{k+2}-P_{k+1}\| +$$

$$+ \ldots + \|P_{k+m+1}-P_{k+m}\| \leqslant V(t_{k+m+1}) - V(t_{k+1}) < \varepsilon_1.$$

Так как $\frac{\delta}{2} \leqslant \frac{(m+1)l}{n}$, $y < M$, то $e^{\frac{2(m+1)yl}{n}} < e^{\delta M}$ и $e^{\frac{2(m+1)yl}{n}} \|P_{k+m+2}-$ $-P_{k+m+1}\| + \ldots + e^{\frac{2(n-k-1)yl}{n}} \|P_n-P_{n-1}\| < e^{\delta M}(\|P_2-P_1\| + \ldots + \|P_n-$ $-P_{n-1}\|) \leqslant V \cdot e^{\delta M}$.

Таким образом, для сумм второй категории получается оценка

$$\|P_{k+1}-P_k\| \cdot \sum_{s=1}^{n-k-1} e^{\frac{2syl}{n}} \|P_{k+s+1}-P_{k+s}\| < \varepsilon_1 + Ve^{\delta M}. \tag{7}$$

Очевидно, что для сумм первой категории

$$\|P_{k+1}-P_k\| \cdot \sum_{s=1}^{n-k-1} e^{\frac{2syl}{n}} \|P_{k+s+1}-P_{k+s}\| < V \cdot \|P_{k+1}-P_k\|. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-k-1} e^{\frac{2syl}{n}} \|P_{k+s+1}-P_{k+s}\| \cdot \|P_{k+1}-P_k\| < (\varepsilon_1 + Ve^{\delta M}) \cdot V + \varepsilon_1 V =$$

$$= 2\varepsilon_1 V + V^2 e^{\delta M}.$$

Аналогично для остальных сумм в (6) получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2kyl}{n}} \|P_{k+1}-P_k\| < \varepsilon_1 + Ve^{\delta M},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{2(n-k)}{n}} \|P_{k+1}-P_k\| < \varepsilon_1 + Ve^{\delta M}; \qquad e^{2ly} < e^{\delta M}.$$

Таким образом,

$$\| A_n(y) - P_n \dots P_2 P_1 \| < 2\varepsilon_1 V + V^2 e^{\delta M} + 2(\varepsilon_1 + V e^{\delta M}) + e^{\delta M} =$$
$$= 2\varepsilon_1 (V+1) + (V+1)^2 e^{\delta M} < \varepsilon \qquad (n > N,\ y < M).$$

Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы, сформулированной в начале статьи. Используя леммы 2° и 3°, найдем такие числа $k_0 > 0$, $N > 0$ и $M < 0$, чтобы при всех $n > N$, $y < M$ выполнялись неравенства

$$\| A_n(y) - P_n \dots P_2 P_1 \| < k_0, \qquad \| P_n \dots P_2 P_1 \| \geqslant 2k_0.$$

Тогда

$$\| A_n(y) \| \geqslant \| P_n \dots P_2 P_1 \| - \| A_n(y) - P_n \dots P_2 P_1 \| > k_0.$$

Фиксируя $y < M$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\| A(y) \| \geqslant k_0 \qquad (y < M).$$

Так как $k_0 > 0$, то отсюда следует, что $\| A(y) \|$ не стремится к нулю при $y \to -\infty$, поэтому оператор (1) одноклеточен.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский, О жордановых клетках бесконечномерных операторов, ДАН, СССР, т. 111, № 5, 1956.

2. Л. А. Сахнович, Спектральный анализ вольтерровских операторов и обратные задачи, ДАН СССР, т. 115, № 4, 1957.

3. Л. А. Сахнович, О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду в обратных задачах, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 1957, 235—262.

4. Л. А. Сахнович, Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)k(x-t)dt$, Изв. АН СССР, сер. матем., 22 1958, 299—308.

5. М. С. Бродский, М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, т. 13, вып. 1 (79), 1958.

Поступила 29.II 1964 г.
Житомир